

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

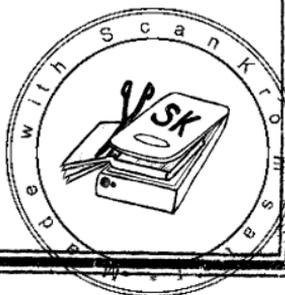
А. Т. ЦВЕТКОВ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

РЯДЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

учпедгиз · 1962



ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

А. Т. ЦВЕТКОВ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

РЯДЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР.
Москва 1962



СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
<i>Вводная глава. Несобственные интегралы</i>	
§ 1. Интегралы с бесконечными пределами	5
§ 2. Интегралы от неограниченных функций	9
Ряды	
<i>Глава I. Числовые ряды</i>	
§ 1. Основные понятия	11
§ 2. Признаки сходимости положительных рядов	16
§ 3. Знакопеременные ряды	23
§ 4. Перестановка членов ряда. Действия над рядами	26
§ 5. Дополнительные задачи к главе I	32
<i>Глава II. Функциональные ряды</i>	
§ 1. Равномерная сходимость	34
§ 2. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов	36
§ 3. Степенные ряды	39
§ 4. Разложение функций в степенные ряды	44
§ 5. Приближенные вычисления с помощью рядов	58
§ 6. Ряды Фурье	63
§ 7. Дополнительные задачи к главе II	82
Дифференциальные уравнения	
<i>Глава I. Дифференциальные уравнения первого порядка</i>	
§ 1. Общие понятия	85
§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными	88
§ 3. Однородные уравнения	100
§ 4. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли	108
§ 5. Уравнения в полных дифференциалах	114
§ 6. Поле направлений. Графическое интегрирование уравнений	116
§ 7. Особые решения. Уравнения Клеро	121
§ 8. Ортогональные траектории	125
§ 9. Разные задачи	128
§ 10. Дополнительные задачи к главе I	130
<i>Глава II. Дифференциальные уравнения высших порядков</i>	
§ 1. Уравнения, допускающие понижение порядка	140
§ 2. Линейные однородные уравнения	147
§ 3. Линейные неоднородные уравнения	152
§ 4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами	157
§ 5. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами	162
§ 6. Дополнительные задачи к главе II	172
Ответы	189

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящего пособия — помочь студенту-заочнику педагогического института овладеть приемами и методами решения задач при самостоятельном изучении курса математического анализа (разделов: «Ряды» и «Дифференциальные уравнения»).

Пособие написано в соответствии с программой специальности «математика», однако им могут воспользоваться и студенты специальности «физика» (в разделе «Ряды» для них написан параграф «Ряды Фурье»).

Книга содержит больше ста решенных типовых примеров и задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Прежде чем приступить к самостоятельному решению задач, необходимо по одному из учебников изучить соответствующий теоретический материал (в начале каждого параграфа настоящего пособия даются такие указания со ссылкой на главу, параграф и пункт учебника). Затем следует внимательно (с карандашом в руках) разобрать примеры решения типовых задач, после чего решить все задачи, предназначенные для самостоятельного решения.

В конце каждой главы приводятся дополнительные задачи, которые не относятся к числу обязательных. Это или более трудные задачи, или задачи на материал, несколько выходящий за пределы программы. Эти задачи предназначены для лиц, желающих более глубоко изучить материал.

В процессе переработки первого издания этой книги и подготовки второго издания мною использованы весьма ценные замечания (как по первому изданию, так и по рукописи второго издания) В. С. Солодовникова, В. В. Цукермана, редактора книги А. З. Рывкина, а также замечания многих преподавателей заочных педагогических институтов. Параграф «Ряды Фурье» написан В. В. Цукерманом. Пользуюсь случаем, чтобы выразить В. С. Солодовникову, В. В. Цукерману и А. З. Рывкину и всем, приславшим замечания о первом издании книги, мою искреннюю благодарность.

Москва, июнь 1961 г.

Автор

ВВОДНАЯ ГЛАВА
НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Интегралы с бесконечными пределами

При изучении рядов требуется иногда умение вычислять или оценивать несобственные интегралы с бесконечными пределами. Поэтому мы начинаем изложение материала с несобственных интегралов.

Соответствующий теоретический материал предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа», т. II, изд. 3, Физматгиз, 1960, гл. XVII, н° н° 282, 283, 285, 286.

Рассмотрим несколько типичных примеров.

Пример 1. Вычислить интеграл:

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

Решение. Согласно определению имеем:

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_e^A \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_e^A \frac{dx}{x \ln^2 x} &= \int_e^A \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_e^A = \\ &= -\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln e} = -\frac{1}{\ln A} + 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln A} + 1 \right) = 1.$$

Пример 2. Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

Решение. В этом примере оба предела интегрирования бесконечны; поэтому предварительно разбиваем данный интеграл на два:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

и вычисляем каждый из них в отдельности (результат не изменится, если при разбиении вместо нуля возьмем любое другое конечное число).

Итак, по определению

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \lim_{A' \rightarrow -\infty} \int_{A'}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}. \quad (*)$$

Далее, находим:

$$\begin{aligned} \int_{A'}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} &= \int_{A'}^0 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(x + 1) \Big|_{A'}^0 = \\ &= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(A' + 1) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(A' + 1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} &= \frac{\pi}{4} - \lim_{A' \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(A' + 1) = \\ &= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Аналогично находим второй интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \quad (**)$$

и

$$\int_0^A \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \operatorname{arctg}(x + 1) \Big|_0^A = \operatorname{arctg}(A + 1) - \operatorname{arctg} 1.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(A + 1) - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как каждый из интегралов (*) и (**) сходится (имеет конечный предел), то и заданный несобственный интеграл также сходится и численно равен сумме значений интегралов (*) и (**), т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Пример 3. Найти интеграл:

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$$

Решение. По определению

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{\ln x}{x} dx.$$

Далее находим:

$$\int_2^A \frac{\ln x}{x} dx = \int_2^A \ln x d \ln x = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_2^A = \frac{\ln^2 A}{2} - \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 A}{2} - \frac{\ln^2 2}{2} = \infty,$$

т. е. заданный интеграл расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{13}}{(x^5 + x^3 + 1)^3} dx.$$

Решение. При $0 \leq x < \infty$ подынтегральная функция непрерывна, положительна и при $x \rightarrow \infty$ является бесконечно

малой 2-го порядка по сравнению с $\frac{1}{x}$, следовательно, данный интеграл сходится (см. Фихтенгольц, II, п°285).

Пример 5. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} dx.$$

Решение. При $1 \leq x < \infty$ подынтегральная функция непрерывна, положительна и

$$\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} > \frac{1}{x} \quad \text{при } x > \sqrt{e - 1}.$$

Так как $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, то и данный интеграл расходится.

В задачах 1—7 либо вычислить заданные несобственные интегралы, либо установить их расходимость.

$$1. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}.$$

$$3. \int_0^{\infty} x \sin x dx.$$

$$4. \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx.$$

$$5. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$6. \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$$

$$7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}.$$

В задачах 8—10 исследовать заданные несобственные интегралы на сходимость.

$$8. \int_1^{\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} dx. \quad 9. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx. \quad 10. \int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

11. Под *главным значением* несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования в смысле Коши (v. p.) понимается число

$$\text{v. p. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

Найти:

а) v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; б) v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$; в) v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$.

В каком случае числовые значения v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ будут одинаковыми?*

§ 2. Интегралы от неограниченных функций

Материал этого параграфа не входит в обязательную программу и предназначен для желающих более глубоко изучить вопрос о несобственных интегралах.

Если функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности точки c отрезка $[a, b]$ (т. е. при $x \rightarrow c$ $f(x) \rightarrow \infty$ или не существует) и непрерывна при $a \leq x < c$ и $c < x \leq b$, то полагают:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\sigma_1} f(x) dx + \lim_{\substack{\sigma_2 \rightarrow 0 \\ c+\sigma_2}} \int_{c+\sigma_2}^b f(x) dx. \quad (1)$$

Если пределы в правой части равенства (1) существуют и конечны, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае — расходящимся (см. Фихтенгольц, II, гл. XVII, п° п° 288, 289).

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, следовательно, данный интеграл есть несобственный от неограниченной функции, поэтому

* Задача 11 не относится к числу обязательных.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\sigma}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} (2\sqrt{x}) \Big|_{\sigma}^1 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\sigma}) = 2.$$

Пример 2. Найти $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{(x-1)^2}$ в промежутке $[0, 3]$ неограниченно возрастает при $x \rightarrow 1$. Следовательно, заданный интеграл — несобственный интеграл от неограниченной функции (особая точка 1). Поэтому

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \int_0^{1-\sigma_1} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} \int_{1+\sigma_2}^3 \frac{dx}{(x-1)^2}. \quad (*)$$

Вычисляем каждый из пределов, стоящих в правой части равенства (*), в отдельности. Имеем:

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \int_0^{1-\sigma_1} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{(x-1)} \right] \Big|_0^{1-\sigma_1} = \lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sigma_1} - 1 \right) = \infty.$$

Аналогично

$$\lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} \int_{1+\sigma_2}^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{(x-1)} \right] \Big|_{1+\sigma_2}^3 = \lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sigma_2} \right) = \infty.$$

Таким образом, оба предела, стоящие в правой части (*), бесконечны, следовательно, $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ расходится.

12. Вычислить несобственные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{б) } \int_{-1}^2 \frac{dx}{x}; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ctg } x \, dx.$$

ГЛАВА I

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. Основные понятия

В разделе «Ряды» мы будем ссылаться на учебники: Н. А. Фролов, Курс математического анализа, ч. 2, Учпедгиз, 1959, и Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, т. II, Физматгиз, 1960. В дальнейшем для краткости при ссылке на эти книги будем писать: Фролов, 2, и Фихтенгольц, II.

Приступая к решению задач настоящего параграфа, предварительно изучите теоретический материал по учебнику: Фролов, 2, раздел 1, гл. 1, § 1, или Фихтенгольц, II, гл. XV, п° п° 234, 235.

Пример 1. Написать простейшую формулу n -го члена ряда по указанным его первым членам:

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots$$

Решение. Исследуем закономерность, которой подчиняются числа, составляющие ряд. Каждый член данного ряда представляет собой дробь, числитель которой равен удвоенному номеру члена. Следовательно, n -й член ряда будет иметь числитель, равный $2n$. Знаменатели дробей представляют собою арифметическую прогрессию, разность которой равна 3. Следовательно, легко догадаться, что знаменатель дроби n -го члена запишется формулой $3n + 2$.

Таким образом, простейшей формулой n -го члена данного ряда будет:

$$a_n = \frac{2n}{3n + 2}.$$

З а м е ч а н и е. Обращаем внимание читателя на следующие два обстоятельства.

1. Если заданы лишь несколько первых членов ряда, то нельзя считать, что задан ряд, так как всегда можно построить бесчисленное множество рядов, первыми членами которых будут заданные числа. В самом деле, если, например, заданы первые два члена ряда:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots,$$

то с одинаковым успехом можно предположить, что общим членом ряда является либо $\frac{1}{2^n}$, либо $\frac{1}{2^{n-1}}$, так как у соответствующих рядов

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots$$

и

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

первые два члена совпадают. Таким образом, первые несколько членов ряда не определяют единственный ряд. Чтобы вполне определить ряд, надо задать формулу его n -го члена.

2. Больше того, конечное число первых членов ряда может и не подчиняться закону построения ряда, т. е. может оказаться, что эти члены нельзя определить по формуле n -го члена. В этом случае при задании ряда обязательно выписываются все его члены, которые не могут быть вычислены по формуле n -го члена, указывается формула n -го члена и номер члена ряда, начиная с которого эта формула применима.

Пример 2. Написать шесть первых членов ряда, если

$$a_1 = 2, a_2 = 1, \text{ а } a_n = \frac{1}{(n-1)^2 - 1} \text{ при } n = 3, 4, 5, \dots$$

Решение. Как видно из условия, первые два члена ряда не могут быть определены из формулы его общего члена, эта формула верна, начиная лишь с третьего члена ряда. Поэтому выписываем данные два первых члена, а остальные вычисляем по формуле общего члена; подставляя в нее вместо n последовательно числа 3, 4, 5, ..., получим:

$$2 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \dots$$

Пример 3. Записать ряд

$$1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} n}{6n-5} + \dots,$$

используя знак суммы (\sum).

Решение. Так как любой член ряда может быть вычислен по формуле общего члена, то краткая запись данного ряда будет иметь вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{6n-5}.$$

Пример 4. Записать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ в развернутом

виде.

Решение. Давая n последовательно значения 1, 2, 3, ..., получим:

$$-1 + \frac{1}{2 - \ln 2} - \frac{1}{3 - \ln 3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n - \ln n} + \dots$$

Пример 5. Найти S_n — сумму n первых членов ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

Пользуясь непосредственно определением суммы ряда, показать, что этот ряд сходится, и найти его сумму S .

Решение. Первый способ. Составим последовательность частичных сумм заданного ряда:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3},$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{2}{5},$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{3}{7},$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} = \frac{4}{9}.$$

Мы видим, что первые частичные суммы представляют собой дроби, числители которых равны индексу (номеру)

частичной суммы, а знаменатели — удвоенному индексу, сложенному с единицей. Поэтому можем предположить, что

$$S_n = \frac{n}{2n+1}.$$

Методом полной математической индукции докажем, что эта формула верна. В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \\ &= \frac{n(2n+3) + 1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2 + 2n + n + 1}{(2n+1)(2n+3)} = \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что

$$S_n = \frac{n}{2n+1}.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, сумма данного ряда существует и равна $\frac{1}{2}$.

Из существования суммы ряда вытекает и его сходимость.

Второй способ. Представим общий член ряда в виде суммы двух дробей, т. е. разложим дробь на простейшие, пользуясь методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}.$$

В этом тождестве мы приводим левую и правую части к общему знаменателю и отбрасываем его:

$$A(2n+1) + B(2n-1) \equiv 1, \text{ или } 2An + A + 2Bn - B \equiv 1.$$

Затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n , получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0, \\ A - B = 1, \end{cases}$$

из которой находим:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Представляя теперь каждый член данного ряда в виде суммы двух слагаемых, мы получим следующее выражение для n -й частичной суммы:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5} - \dots - \frac{1}{2(2n-1)} + \\ &+ \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}. \end{aligned}$$

Все слагаемые, кроме первого и последнего, взаимно уничтожились.

Теперь легко находим сумму заданного ряда*:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} \right] = \frac{1}{2}.$$

13. Написать простейшую формулу n -го члена ряда по указанным его первым членам:

а) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$;

б) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$;

в) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots$;

г) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$;

д) $1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + \dots$.

14. Написать 5 первых членов ряда по известному общему члену a_n :

* Заметим, что в большинстве случаев не удается найти общей формулы для n -й частичной суммы ряда, поэтому вопрос о существовании конечной суммы ряда (т. е. вопрос о сходимости ряда) приходится решать косвенным путем, используя признаки сходимости.

$$\text{а) } a_n = \frac{3n-2}{n^2+1}; \quad \text{б) } a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}; \quad \text{в) } a_n = \frac{2+(-1)^n}{n^2}.$$

15. Записать ряд, используя знак суммы $\left(\sum\right)$:

$$\text{а) } \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \dots + \frac{n}{n^2+1} + \dots;$$

$$\text{б) } \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \dots + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)} + \dots;$$

$$\text{в) } 1 + \frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} - \dots + (-1)^n \frac{2n-1}{(n-1)n} + \dots$$

$$(n = 2, 3, 4, \dots).$$

16. Записать ряд в развернутом виде:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[3+(-1)^n]^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2 + \sin \frac{n\pi}{2}\right) \cos n\pi}{n!};$$

$$\text{в) } 3 + 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n-3}{(n-1)^2 n^2}.$$

В задачах 17 — 19 для каждого заданного ряда найти S_n , S и, пользуясь непосредственно определением суммы ряда, показать, что эти ряды сходятся.

$$17. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

$$18. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

$$19. \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \frac{35}{216} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots$$

§ 2. Признаки сходимости положительных рядов

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел 1, гл. 1, § 2, 3, 4, или Фихтенгольц, II, гл. XV, п^оп^о 235 — 239, 241.

Пример 1. Исследовать вопрос о поведении ряда с помощью необходимого признака сходимости:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$$

Решение. Находим предел общего члена a_n ряда при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Так как в данном случае a_n не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то заданный ряд не удовлетворяет необходимому признаку сходимости и, следовательно, расходится.

Мы воспользовались здесь весьма важным замечанием, в н° 235 учебника Фихтенгольца. Рекомендуем его хорошо продумать и обратить внимание на приведенный там пример.

Примером расходящегося ряда, у которого, однако, $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, может служить гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

(см. Фролов, 2, гл. 1, § 2, или Фихтенголец, II, н° 236).

Пример 2. Установить сходимость или расходимость ряда с помощью теорем о сравнении рядов.

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

Решение. Сравняя данный ряд с гармоническим рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots,$$

видим, что при всех значениях n

$$\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$$

(проверьте справедливость этого неравенства).

А так как гармонический ряд расходится, то и заданный ряд также расходится.

Пример 3. Установить сходимость или расходимость ряда

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

с помощью теорем о сравнении рядов.

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который, как известно, расходится. Для этого найдем предел отношения их общих членов:

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n-1} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} > 0.$$

Так как $K = \frac{1}{2} > 0$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то и данный ряд расходится.

Замечание. При решении этой задачи, мы воспользовались теоремой:

Пусть даны два ряда:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (A)$$

$$\text{и} \quad b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots, \quad (B)$$

и пусть существует конечный или бесконечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K.$$

Тогда, 1) если ряд (B) сходится и $K < \infty$, то и ряд (A) сходится.

2) если ряд (B) расходится и $K > 0$, то и ряд (A) расходится.

Таким образом, при $0 < K < \infty$ оба ряда сходятся или расходятся одновременно (см. Фихтенгольц, II, п° 237, теорема 2).

Пример 4. С помощью теорем о сравнении рядов установить сходимость или расходимость ряда:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Решение. Сравним члены заданного ряда с членами ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Имеем;

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. Фролов, 2, конец § 4, или Фихтенгольц, II, н° 236), следовательно, и данный ряд сходится, так как его члены меньше соответствующих членов сходящегося ряда (см. Фролов 2, § 3, или Фихтенгольц, II, н° 237, теорема 1).

Пример 5. С помощью теорем о сравнении рядов исследовать, сходится или расходится ряд:

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2^2}{5^2\sqrt{3}} + \frac{3^3}{7^3\sqrt{4}} + \dots + \frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}}.$$

Решение. Оценим общий член a_n заданного ряда. Имеем:

$$\frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}} < \frac{n^n}{(2n+1)^n} = \left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right)^n < \frac{1}{2^n}$$

при всех n . Таким образом, члены заданного ряда меньше членов сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, представляющего собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$; следовательно, данный ряд сходится.

Пример 6. Исследовать вопрос о сходимости ряда

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \dots + \frac{1}{\ln^n (n+1)} + \dots$$

с помощью признака Коши.

Решение. Находим:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n (n+1)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln (n+1)} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд сходится (см. Фролов, 2, § 3, или Фихтенгольц, II, н° 239).

Пример 7. Установить с помощью признака Даламбера, сходится или расходится ряд:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4!!} + \frac{3}{6!!} + \dots + \frac{n}{(2n)!!} + \dots *$$

Решение. Находим:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{(2n+2)!!} : \frac{n}{(2n)!!} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!! (n+1)}{(2n+2)!! \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(2n+2)n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2n+2} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

то ряд сходится (см. Фролов, 2, §3, и Фихтенгольц, II, n° 239).

Пример 8. С помощью признака Даламбера установить, сходится или расходится ряд:

$$3 + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^2 \cdot 3!}{3^3} + \dots + \frac{3^n \cdot n!}{n^n} + \dots$$

Решение. Находим:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^n \cdot n!}{n^n} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot (n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1. \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

то ряд расходится.

Пример 9. С помощью интегрального признака исследовать на сходимость ряд:

* Выражение $(2n)!!$ — условная запись произведения всех четных чисел от 2 до $2n$, т. е.

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n.$$

Точно так же $(2k+1)!!$ — произведение всех нечетных чисел от 1 до $2k+1$, т. е.

$$(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+1).$$

$$\frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \dots + \frac{1}{(n+1) \ln^2 (n+1)} + \dots$$

Решение. Функция $\frac{1}{(x+1) \ln^2 (x+1)}$ при $x \geq 1$ положительна, непрерывна и монотонно убывает, поэтому для исследования данного ряда на сходимость можно воспользоваться интегральным признаком. Находим:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln^2 (x+1)} &= \int_1^{\infty} \frac{d \ln (x+1)}{\ln^2 (x+1)} = -\frac{1}{\ln (x+1)} \Big|_1^{\infty} = \\ &= -\frac{1}{\ln \infty} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} * \end{aligned}$$

Таким образом, соответствующий несобственный интеграл равен конечному числу, а именно $\frac{1}{\ln 2}$, т. е. он сходится, значит, данный ряд также сходится.

20. С помощью необходимого признака установить, какие из указанных рядов расходятся:

а) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{2n-1}{2n} + \dots$;

б) $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \dots$;

в) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \dots + \frac{2n}{3^n} + \dots$;

г) $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{3}{3001} + \dots + \frac{n}{1000n+1} + \dots$

21. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью теорем сравнения:

а) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \dots + \frac{n}{n^2+1} + \dots$;

б) $\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots$;

в) $\sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 2\alpha}{8} + \frac{\sin^2 3\alpha}{27} + \dots + \frac{\sin^2 n\alpha}{n^3} + \dots$;

* Условная запись $f(\infty)$ означает $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

$$\text{г)} 1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} + \dots;$$

$$\text{д)} \frac{5}{2} + \frac{25}{12} + \frac{125}{56} + \dots + \frac{5^n}{2^n (2^n - 1)} + \dots.$$

22. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью признака Коши:

$$\text{а)} \frac{2}{3} + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} + \dots;$$

$$\text{б)} \frac{2}{1} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n + \dots;$$

$$\text{в)} \arcsin 1 + \arcsin^2 \frac{1}{2} + \dots + \arcsin^n \frac{1}{n} + \dots.$$

23. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью признака Даламбера:

$$\text{а)} 2 + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \dots + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)} + \dots;$$

$$\text{б)} 1 + \frac{1 \cdot 4}{3!!} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{5!!} + \dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{(2n-1)!!} + \dots;$$

$$\text{в)} 1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^2} + \dots.$$

24. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью интегрального признака.

$$\text{а)} \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n} + \dots;$$

$$\text{б)} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \dots.$$

В задачах 25 — 36 установить сходимость или расходимость рядов, выбрав самостоятельно для исследования в каждой задаче подходящий признак сходимости (расходимости) ряда.

$$25. 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots.$$

$$26. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots.$$

$$27. \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{19} + \dots + \frac{n^2}{2n^2 + 1} + \dots$$

$$28. \frac{3}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{5}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{7}{4^2 \cdot 5^2} + \dots + \frac{2n+1}{(n+1)^2 (n+2)^2} + \dots$$

$$29. \frac{3}{4} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n + \dots$$

$$30. \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{7} + \left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{3}{2}} + \dots + \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}} + \dots$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}.$$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000 \cdot 1002 \cdot 1004 \dots (998 + 2n)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n - 2)}.$$

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \dots n^2}{(4n - 3)!!}.$$

$$36. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}.$$

§ 3. Знакопеременные ряды

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел 1, гл. 1, § 3, или Фихтенгольц, II, гл. XV, п^оп^о 242 — 244.

Пример 1. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n} + \dots$$

Решение. Члены заданного знакопеременного ряда по абсолютной величине убывают и, кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

Следовательно, по признаку Лейбница, данный ряд сходится.

Выясним теперь, как сходится данный ряд: абсолютно или условно (неабсолютно). Для этого исследуем на сходимость соответствующий ему знакоположительный ряд:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \quad (*)$$

Ряд (*) получается из гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

в результате умножения всех его членов на $\frac{1}{2}$. Так как гармонический ряд расходится, то и ряд (*) также расходится.

Таким образом, в данной задаче знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится. Следовательно, данный ряд сходится условно (неабсолютно).

Пример 2. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд:

$$1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5} + \dots$$

Решение. Покажем, что члены этого ряда по абсолютной величине убывают, т. е.

$$c_n > c_{n+1}$$

при любом n . В самом деле, неравенство

$$\frac{n}{6n-5} > \frac{n+1}{6(n+1)-5}$$

или эквивалентное ему неравенство

$$6n^2 + n > 6n^2 + n - 5$$

выполняется при всех значениях n . Однако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n-5} = \frac{1}{6} \neq 0.$$

Следовательно, данный ряд расходится (ряд не удовлетворяет необходимому признаку сходимости).

Пример 3. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд:

$$\frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \frac{27}{8} - \frac{64}{16} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n} + \dots$$

Решение. Сразу же исследуем заданный ряд на абсолютную сходимость, т. е. исследуем на сходимость ряд:

$$\frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \dots + \frac{n^3}{2^n} + \dots \quad (*)$$

С помощью признака Даламбера имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 2^n}{2^{n+1} n^3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3}{2} = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Так как предел отношения последующего члена к предыдущему меньше единицы, то ряд (*) сходится. Отсюда вытекает, что данный ряд также сходится и притом абсолютно.

З а м е ч а н и е. В случаях, аналогичных рассмотренной задаче, когда применение признака Лейбница связано с громоздкими выкладками, выгодно сразу же исследовать знакопеременный ряд на абсолютную сходимость с помощью признака Даламбера (или Коши). Если признак Даламбера (или Коши) устанавливает, что ряд, составленный из абсолютных величин членов заданного ряда, сходится, то заданный знакопеременный ряд сходится абсолютно. Если же признак Даламбера (или Коши) устанавливает, что ряд, составленный из абсолютных величин членов заданного ряда, расходится, то заданный знакопеременный ряд не может сходиться даже условно, т. е. он расходится.

В самом деле, пусть дан ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$$

где a_n — произвольные числа (положительные или отрицательные), и пусть, применив признак Даламбера для ряда, составленного из абсолютных величин исходного ряда, будем иметь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1.$$

Из этого вытекает, что при достаточно больших n

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \quad \text{или} \quad |a_{n+1}| > |a_n|$$

и, следовательно, общий член исходного ряда не может стремиться к нулю, а потому рассматриваемый ряд расходится.

В задачах 37—44 выяснить, какие из данных знакопеременных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

$$37. 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}} + \dots$$

$$38. 2 - \frac{3}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n} + \dots$$

$$39. 1 - \frac{1}{3^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3} + \dots$$

$$40. -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}. \quad 42. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}.$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n+5)}.$$

§ 4. Перестановка членов ряда. Действия над рядами

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел 1, гл. 1, § 1 и § 5, или Фихтенгольц, II, гл. XV, п° п° 245—248.

Пример 1. Зная, что сумма ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots \quad (1)$$

равна $\ln 2$, найти сумму ряда

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{2m} + \dots, \quad (2)$$

полученного из данного в результате перестановки его членов.

Решение. Обозначим n -ю частичную сумму гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

через H_m (индекс m указывает число слагаемых гармонического ряда), тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2m} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right) = \\ &= \frac{1}{2} H_m \end{aligned} \quad (*)$$

и

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m-1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m} - \\ - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} \right) &= H_{2m} - \frac{1}{2} H_m. \end{aligned} \quad (**)$$

Выразим теперь через H_m частичную сумму ряда (1):

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} + \dots$$

Используя соотношения (*) и (**), будем иметь:

$$\begin{aligned} S_{2m} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} = \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} \right) = \\ &= H_{2m} - \frac{1}{2} H_m - \frac{1}{2} H_m = H_{2m} - H_m. \end{aligned}$$

Здесь мы имеем дело с суммами, состоящими из конечного числа слагаемых, поэтому мы вправе делать любые перестановки слагаемых.

По условию задачи

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = \ln 2,$$

следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (H_{2m} - H_m) = \ln 2.$$

Теперь приступим к рассмотрению ряда (2). Его $3m$ -я частичная сумма будет:

$$\begin{aligned} S'_{3m} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4m-3} + \\ + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{2m} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4m-3} + \\ + \frac{1}{4m-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} \right) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= H_{4m} - \frac{1}{2} H_{2m} - \frac{1}{2} H_m = \\
&= H_{4m} - H_{2m} + \frac{1}{2} H_{2m} - \frac{1}{2} H_m = \\
&= H_{4m} - H_m + \frac{1}{2} (H_{2m} - H_m).
\end{aligned}$$

Переходя к пределу, окончательно найдем сумму искомого ряда:

$$\begin{aligned}
S' &= \lim_{m \rightarrow \infty} S'_{3m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[(H_{4m} - H_{2m}) + \frac{1}{2} (H_{2m} - H_m) \right] = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} (H_{4m} - H_{2m}) + \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} (H_{2m} - H_m) = \\
&= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

Рассмотренный пример показывает, что условно сходящийся ряд не обладает переместительным свойством и что если изменить порядок следования членов такого ряда, то сумма его изменится (см. Фролов, 2, гл. I, § 5, или Фихтенгольц, II, н° 247).

Пример 2. Составить сумму рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n}$ и

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}$. Сходится ли эта сумма?

Решение. Суммой рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. Исходя из этого определения, имеем:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{3^n} + \frac{(-1)^n - n}{3^n} \right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{3^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}}.
\end{aligned}$$

Числитель выражения общего члена при n нечетном обращается в нуль, а при n четном равен 2.

Полученный ряд сходится, так как представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем, равным $\frac{1}{9}$.

Пример 3. Составить произведение рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. Сходится ли это произведение?

Решение. Составим произведение по правилу Коши. Для этого составим бесконечную прямоугольную таблицу парных произведений всех членов данных рядов и выпишем их по диагоналям.

$1 \cdot 1$	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 1$	\dots	$\frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot 1$	\dots
$1 \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$	\dots	$\frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2}$	\dots
$1 \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4}$	\dots	$\frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{4}$	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$1 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$	\dots	$\frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$	\dots

Получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + \\ & \quad + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) + \dots \\ & \quad \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{1}{2^{n-3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) + \dots \end{aligned}$$

Для того чтобы узнать, сходится ли составленное произведение, исследуем на сходимость каждый ряд-с множитель.

Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ легко устанавливается по интегральному признаку. В самом деле,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx = -2x^{-\frac{1}{2}} \Big|_1^{\infty} = -\frac{2}{\sqrt{x}} \Big|_1^{\infty} = \\ = -\frac{2}{\sqrt{\infty}} + 2 = 2.$$

Так как интеграл равен конечному числу, то ряд сходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ сходится, так как он представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем, равным $\frac{1}{2}$.

Следовательно, и составленный ряд-произведение также сходится*.

Пример 4. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

суммой его первых n членов. В частности, оценить точность такого приближения при $n = 4$.

Решение. Оценим остаток ряда:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \dots = \\ = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \right] < \\ < \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \right].$$

* Следует иметь в виду, что ряд-произведение всегда сходится, если оба ряда-сомножители сходятся абсолютно или если один из них сходится абсолютно, а другой условно. Если же оба ряда-сомножители сходятся условно, то ряд-произведение может расходиться. Произведение двух расходящихся рядов, вообще говоря, расходится. Однако можно привести пример двух расходящихся рядов, произведение которых сходится.

В квадратных скобках стоит бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2}$, ее сумма равна:

$$\frac{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2n+2}}{\frac{2n+2-1}{2n+2}} = \frac{1}{2n+1}.$$

Таким образом,

$$R_n < \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{a_n}{2n+1}.$$

$$R_4 < \frac{1}{4! 2^4 \cdot 9} = \frac{1}{3456} < 3 \cdot 10^{-4}.$$

45. Зная, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ равна $\ln 2$,

найти сумму ряда

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{4m-2} - \frac{1}{4m} + \dots,$$

полученного из данного в результате перестановки его членов.

46. Дан условно сходящийся ряд. Изменится ли сумма ряда, если первые 1000 членов его переставить, а порядок следования остальных членов оставить без изменения?

47. Составить разность расходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ и исследовать ее сходимость.

48. Сходится ли ряд, образованный вычитанием ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \text{ из ряда } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}?$$

49. Составить ряд $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots\right)^2$.

Сходится ли этот ряд?

50. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ суммой его первых n членов. Оценить точность такого приближения при $n = 10$.

51. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ суммой его первых n членов. В частности, оценить точность такого приближения при $n = 1000$.

Указание. Члены остатка ряда $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots$ заменить большими дробями $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$, и каждую из полученных дробей разбить на простейшие.

§ 5. Дополнительные задачи к главе I

52. Доказать, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$:

а) сходится при произвольном q , если $p > 1$, и при $q > 1$, если $p = 1$;

б) расходится при произвольном q , если $p < 1$, и при $q \leq 1$, если $p = 1$.

53. Доказать, что ряд чисел, обратных членам арифметической прогрессии, расходится.

54. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) сходится, то

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится. Обратное утверждение не-

верно; привести примеры.

55. Пусть даны два расходящихся ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

с неотрицательными членами.

Что можно сказать о сходимости рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) \text{ и б) } \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)^*.$$

56. Пусть даны два ряда

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } (B) \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

с неотрицательными членами.

Что можно сказать о сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n):$$

а) если и ряд (A) и ряд (B) расходятся?

б) если ряд (A) расходится, а ряд (B) сходится?

в) если и ряд (A) и ряд (B) сходятся?

57. Убедиться в том, что признак Лейбница не применим к знакочередующимся рядам:

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots \\ \dots + \frac{1}{\sqrt{k}+1} - \frac{1}{\sqrt{k}-1} + \dots ;$$

$$\text{б) } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} - \\ - \frac{1}{3^{k-1}} + \dots ;$$

$$\text{в) } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{3^k} + \dots ;$$

$$\text{г) } \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k-3} + \dots .$$

Выяснить, какие из этих рядов расходятся, какие сходятся условно, какие абсолютно.

Указание. В примерах а) и г) сгруппировать все члены по два, не меняя порядка следования членов ряда, и исследовать на сходимость полученные знакостоянные ряды. В примерах б) и в) исследовать на сходимость отдельно ряд, составленный из положительных членов, и ряд, составленный из отрицательных членов.

* Запись $\min(a, b)$ означает, что из двух данных чисел a и b выбирается меньшее, а $\max(a, b)$ означает, что из чисел a и b выбирается большее.

ГЛАВА II

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 1. Равномерная сходимость

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел 1, гл. II, § 1, 2, или Фихтенгольц, II, гл. XVI, н° н° 263—265.

Пример 1. Показать, что в интервале $0 \leq x < \infty$ функциональный ряд

$$\frac{1}{3\sqrt{1+3x}} + \frac{1}{9\sqrt{1+5x}} + \dots + \frac{1}{3^n\sqrt{1+(2n+1)x}} + \dots$$

сходится равномерно. Начиная с какого номера n остаток ряда $\varphi_n(x)$ (независимо от значения x) удовлетворяет неравенству

$$|\varphi_n(x)| < 0,01?$$

Решение. Воспользуемся признаком Вейерштрасса (см. Фролов, 2, гл. II, § 1, или Фихтенгольц, II, н° 265). Члены данного ряда в заданном интервале не больше соответствующих членов ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots, \quad (*)$$

представляющего собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{3}$ и, следовательно, сходящегося. Поэтому данный ряд сходится равномерно. В таких случаях говорят, что данный ряд *мажорируется* рядом (*).

Для оценки остатка $\varphi_n(x)$ функционального ряда подсчитаем частичную сумму S_n и сумму S числового ряда (*).

Имеем:

$$S_n = \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

и, следовательно,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}.$$

Очевидно, что остаток R_n числового ряда равен:

$$R_n = S - S_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}.$$

Остаток $\varphi_n(x)$ данного функционального ряда будет не больше остатка числового ряда (*), поэтому

$$\varphi_n(x) \leq \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Найдем теперь, при каком значении n будет выполняться неравенство

$$\varphi_n(x) < 0,01.$$

Для этого решаем неравенство

$$\frac{1}{2 \cdot 3^n} < 0,01 \text{ или } 3^n > 50.$$

Откуда $n \geq 4$.

58. Определить при $0 < x \leq 1$ сумму и остаток функционального ряда

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \dots + x(1-x)^{n-1} + \dots$$

и показать, что он сходится равномерно на отрезке $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. При каком значении n остаток данного ряда удовлетворяет неравенству

$$\varphi_n(x) < 0,01$$

независимо от значения x на этом отрезке?

59. Показать, что функциональный ряд

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)} + \dots$$

равномерно сходится к функции $\frac{1}{2(x+1)}$ для всех $x \geq 0$.

При каком значении n остаток ряда удовлетворяет неравенству

$$|\varphi_n(x)| < 0,01$$

для любого $x \geq 0$?

§ 2. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел I, гл. II, § 3, 4, или Фихтенгольц, II, гл. XVI, н° н° 266, 269, 270.

Пример 1. Показать, что ряд

$$x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots \quad (*)$$

равномерно сходится в интервале

$$-1 + \omega \leq x \leq 1 - \omega,$$

где ω — любое положительное число, меньшее 1. Интегрированием данного ряда найти сумму ряда

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Решение. Члены функционального ряда (*) не больше членов числового ряда

$$q^2 + q^4 + \dots + q^{2n} + \dots,$$

абсолютно сходящегося при $0 < q \leq 1 - \omega$ (это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем q^2); следовательно, в указанном интервале ряд (*) сходится равномерно (признак Вейерштрасса).

Найдем сумму ряда (*), также являющегося при $|x| < 1$ бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем, равным x^2 . По формуле, известной из школьного курса, находим сумму $S(x)$ этой прогрессии:

$$S(x) = x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Поскольку ряд (*) сходится равномерно в интервале $-1 + \omega \leq x \leq 1 - \omega$, его можно почленно интегрировать; в результате почленного интегрирования ряда (*) получим:

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \int_0^x \frac{x^2}{1-x^2} dx.$$

Остается найти интеграл, стоящий в правой части последнего равенства. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{x^2}{1-x^2} dx &= \int_0^x \frac{1-1x+x^2}{1-x^2} dx = \int_0^x \frac{1}{1-x^2} dx - \int_0^x \frac{1-x^2}{1-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \Big|_0^x - x \Big|_0^x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - x. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - x$$

при $-1 < x < 1$ *.

Пример 2. Исходя из прогрессии

$$1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{3n} + \dots = \frac{1}{1-x^3} \quad (|x| < 1), (*)$$

найти сумму ряда

$$3x^2 + 6x^5 + \dots + 3nx^{3n-1} + \dots \quad (**)$$

Решение. Сопоставив ряд (**) с рядом (*), замечаем, что ряд (**) получен из ряда (*) в результате почленного дифференцирования последнего.

Если ряд (*) сходится к своей сумме равномерно и ряд (**) также сходится равномерно, то сумма ряда (**) может быть получена дифференцированием функции $\frac{1}{1-x^3}$, представляющей собой сумму ряда (*).

* Мы заменили замкнутый интервал сходимости ряда $-1 + \omega < x < 1 - \omega$ на открытый интервал $-1 < x < 1$, в силу того что ω — любое положительное число, меньшее 1, в частности, его можно выбрать сколь угодно малым.

Теперь покажем, что ряды (*) и (**) сходятся равномерно в интервале $-1 + \omega \leq x \leq 1 - \omega$, где ω — любое положительное число, меньшее 1.

В самом деле, члены функционального ряда (*) не больше членов числового ряда

$$1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{3n} + \dots,$$

абсолютно сходящегося при $q < 1$ (это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем q^3); следовательно, в интервале $-1 + \omega \leq x \leq 1 - \omega$ ряд (*) сходится равномерно.

Аналогично, члены ряда (**) не больше членов числового ряда

$$3q^2 + 6q^5 + \dots + 3nq^{3n-1} + \dots,$$

абсолютная сходимость которого при $q < 1$ легко доказывается с помощью признака Даламбера. В самом деле,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)q^{3n+2}}{3nq^{3n-1}} = q^3 < 1.$$

Поэтому ряд (**) также сходится равномерно при $-1 + \omega \leq x \leq 1 - \omega$. Следовательно, сумма ряда (**) будет равна

$$\left(\frac{1}{1-x^3} \right)' = \frac{3x^2}{(1-x^3)^2},$$

т. е.

$$3x^2 + 6x^5 + \dots + 3nx^{3n-1} + \dots = \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}$$

при $-1 < x < 1$.

60. Показать, что ряд

$$x^2 + x^6 + \dots + x^{4n-2} + \dots$$

равномерно сходится в интервале

$$-1 + \omega \leq x \leq 1 - \omega,$$

где ω — любое положительное число, меньшее 1. Интегрированием данного ряда найти сумму ряда

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \dots$$

61. Исходя из прогрессии

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1),$$

найти сумму ряда:

а) $1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$;

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + (n+1)(n+2)x^n + \dots$.

62. Доказать равенство:

$$x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \dots = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} .$$

63. Убедиться, что ряд

$$\frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 4\pi x}{4} + \dots + \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n} + \dots$$

равномерно сходится на всей числовой оси. Показать, что этот ряд нельзя почленно дифференцировать ни в каком интервале.

§ 3. Степенные ряды

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел 1, гл. III, § 1—3, или Фихтенгольц, II, гл. XVI, п° п° 272, 273, 275, 276.

Пример 1. Найти промежуток сходимости ряда

$$x + \frac{x^2}{20} + \frac{x^3}{300} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} + \dots$$

Решение. Радиус сходимости ряда находим по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad *$$

* Формула

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

легко выводится из следующих соображений.

Пусть задан ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (*)$$

Так как для него

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

В нашей задаче

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 10^{n-1}}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 10^n}.$$

Поэтому

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 10^n}{n \cdot 10^{n-1}} = 10 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 10.$$

Значит, данный ряд сходится при значениях x , удовлетворяющих неравенству

$$|x| < 10 \text{ или } -10 < x < 10.$$

Исследуем теперь поведение ряда на концах промежутка. Подставляя в данный ряд вместо x число 10, получим числовой расходящийся ряд, так как

$$\begin{aligned} & 10 + \frac{10}{2} + \frac{10}{3} + \dots + \frac{10}{n} + \dots = \\ & = 10 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right), \end{aligned}$$

а стоящий в скобках гармонический ряд расходится. Следовательно, при $x = 10$ данный степенный ряд расходится. При $x = -10$ получим числовой знакпеременный ряд

поскольку x не зависит от n , то на основании признака Даламбера находим, что при $x \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \right.$ ряд (*) сходится, а при

$|x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ расходится. Отсюда заключаем, что ряд (*) сходится при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству

$$|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

и расходится при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству

$$|x| > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Поэтому число $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ называют *радиусом сходимости* ряда (*) и обозначают буквой R .

Заметим, что формула (1) справедлива только для тех рядов, члены которых содержат все целые положительные степени переменного x , т. е. для которых все $a_n \neq 0$.

$$-10 + \frac{10}{2} - \frac{10}{3} + \dots + (-1)^n \frac{10}{n} + \dots$$

который сходится условно (признак Лейбница).

Таким образом, данный степенной ряд сходится при всех значениях x , удовлетворяющих неравенствам

$$-10 \leq x < 10,$$

и его промежуток сходимости представляет собой полузамкнутый интервал $[-10, 10)$.

Пример 2. Найти промежуток сходимости ряда

$$1 + 2x^2 + 4x^4 + \dots + 2^n x^{2n} + \dots \quad (*)$$

и исследовать его поведение на концах промежутка.

Решение. Здесь мы не вправе применить формулу (1) для отыскания радиуса сходимости ряда (*), так как он не содержит нечетных степеней x . Поэтому промежуток сходимости ряда найдем, воспользовавшись признаком Даламбера. Данный ряд будет сходиться при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n x^{2n}}{2^{n-1} x^{2n-2}} \right| < 1.$$

Отсюда получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2x^2) < 1.$$

Выражение в скобках не зависит от n , поэтому

$$2x^2 < 1 \text{ или } x^2 < \frac{1}{2}.$$

Окончательно получаем:

$$|x| < \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Значит, ряд (*) сходится при всех значениях x , удовлетворяющих неравенствам

$$-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Исследуем поведение ряда на концах промежутка. При $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ получим расходящийся числовой ряд;

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

На концах интервала данный степенной ряд расходится.

Итак, промежутком сходимости данного ряда является интервал $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Замечание. Эту задачу можно решить и так: положим $x^2 = z$, тогда получим ряд:

$$1 + 2z + 4z^2 + \dots + 2^n z^n + \dots,$$

к которому мы вправе применить формулу (1). Поэтому находим:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, для ряда (*) радиус сходимости равен:

$$R_1 = \sqrt{R} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Пример 3. Найти промежуток сходимости ряда

$$(x-2) + \frac{2! (x-2)^2}{2^2} + \dots + \frac{n! (x-2)^n}{n^n} + \dots$$

и исследовать его поведение на концах промежутка.

Решение. Находим радиус сходимости ряда:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! (n+1)^{n+1}}{n^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n (n+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \end{aligned}$$

Следовательно, данный ряд сходится при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству

$$|x-2| < e$$

или неравенствам

$$-e < x-2 < e.$$

Прибавляя ко всем частям неравенств по 2, будем иметь:

$$2-e < x < 2+e.$$

Исследуем теперь поведение ряда на концах промежутка. При $x = 2+e$, получим числовой ряд:

$$e + \frac{2! e^2}{2^2} + \dots + \frac{n! e^n}{n^n} + \dots$$

Чтобы выяснить поведение этого ряда, воспользуемся признаком Даламбера (без предельного перехода!):

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)! e^{n+1} n^n}{(n+1)^{n+1} n! e^n} = \frac{(n+1) e \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= \frac{e \cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1, \end{aligned}$$

так как $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ при любых конечных значениях n и только при $n \rightarrow \infty$ выражение $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$. Это неравенство показывает, что члены полученного числового ряда с возрастанием номера члена возрастают, следовательно, не выполняется необходимый признак сходимости ряда и ряд расходится*.

При $x = 2 - e$ получим такой же, только знакпеременный ряд, и так как его члены не убывают, то он расходится.

Итак, промежутком сходимости данного степенного ряда является интервал $(2 - e, 2 + e)$.

В задачах 64—71 найти промежуток сходимости степенного ряда и исследовать поведение ряда на концах промежутка.

$$64. \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \dots$$

$$65. \frac{\ln 2}{2} x^2 + \frac{\ln 3}{3} x^3 + \dots + \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1} + \dots$$

$$66. x - \frac{x^3}{3 \cdot 2\sqrt{2}} + \frac{x^5}{3^2 \cdot 3\sqrt{3}} - \dots \\ \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{3^{n-1} \cdot n\sqrt{n}} + \dots$$

$$67. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

* Этот пример показывает, что в ряде случаев выгоднее воспользоваться обычной, а не предельной формой признака Даламбера (см. Фихтенгольц, п^о 239). В самом деле, попытка воспользоваться здесь предельной формой признака Даламбера не дала бы никаких результатов, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

$$68. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (x+3)^n}{3^{n+1}}. \quad 69. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$70. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n \cdot 4^n}. \quad 71. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1) \ln(n+1)}.$$

§ 4. Разложение функций в степенные ряды

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел 1, гл. III, § 4 — 8, или Фихтенгольц, II, гл. XV, п° 252, 253, 255, 258; гл. XVI, п° 277.

Пример 1. Разложить функцию $y = \sin \frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$.

Решение. Для разложения данной функции в степенной ряд в окрестности точки $x = 2$ воспользуемся формулой Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n(x), \quad (*)$$

где $R(x)$ — остаточный член. Он может быть записан (в форме Лагранжа) так:

$$R_n(x) = (x-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

(ξ — некоторое среднее значение между a и x). Если $f(x)$ дифференцируема бесконечное число раз и $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, то написанный по такому же закону бесконечный ряд, называемый *рядом Тейлора*, будет сходиться к $f(x)$ во всех точках его сходимости.

Напишем, пока формально, ряд Тейлора для данной функции $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$. Для этого находим производные:

$$f'(x) = \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{4} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4^2} \sin \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi^2}{4^2} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$f'''(x) = -\frac{\pi^3}{4^3} \cos \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi^3}{4^3} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

.....

Подмечая закономерность в формулах для производных, мы можем предположить, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{\pi^n}{4^n} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

Докажем методом полной математической индукции справедливость этой формулы. В самом деле, при $n = 1$ формула верна. Далее, допуская ее справедливость для n -й производной, легко находим, что она верна и для $(n + 1)$ -й производной.

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\pi^{n+1}}{4^{n+1}} \cos \left(\frac{\pi x}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{\pi^{n+1}}{4^{n+1}} \sin \left[\frac{\pi x}{4} + (n + 1) \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{\pi^n}{4^n} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + n \frac{\pi}{2} \right).$$

Очевидно, что $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ дифференцируема в любой точке числовой оси (в частности, и в окрестности точки $x = 2$) бесконечное число раз.

Теперь находим:

$$f(2) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1,$$

$$f'(2) = \frac{\pi}{4} \sin \left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

$$f''(2) = \frac{\pi^2}{4^2} \sin \left(\frac{2\pi}{4} + \pi \right) = -\frac{\pi^2}{4^2},$$

$$f'''(2) = \frac{\pi^3}{4^3} \sin \left(\frac{2\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} \right) = 0,$$

$$f^{(4)}(2) = \frac{\pi^4}{4^4} \sin \left(\frac{2\pi}{4} + 2\pi \right) = \frac{\pi^4}{4^4},$$

.....

$$f^{(2k)}(2) = \frac{\pi^{2k}}{4^{2k}} \sin\left(\frac{2\pi}{4} + k\pi\right) = (-1)^k \frac{\pi^{2k}}{4^{2k}},$$

$$f^{(2k+1)}(2) = \frac{\pi^{2k+1}}{4^{2k+1}} \sin\left[\frac{2\pi}{4} + \frac{(2k+1)\pi}{2}\right] = 0,$$

Подставляя вычисленные значения производных в формулу Тейлора, получим:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi x}{4} = & 1 - \frac{\pi^2}{4^2 \cdot 2!} (x-2)^2 + \frac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!} (x-2)^4 - \dots \\ & \dots + (-1)^k \frac{\pi^{2k}}{4^{2k} (2k)!} (x-2)^{2k} + R_n(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь ряд:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\pi^2}{4^2 \cdot 2!} (x-2)^2 + \frac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!} (x-2)^4 - \dots \\ \dots + (-1)^k \frac{\pi^{2k}}{4^{2k} (2k)!} (x-2)^{2k} + \dots \end{aligned}$$

Поскольку он не содержит всех степеней x , то формула (1) неприменима, и для отыскания его интервала сходимости воспользуемся признаком Даламбера. Имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi^{2k+2} (x-2)^{2k+2} \cdot 4^{2k} (2k)!}{4^{2k+2} \cdot (2k+2)! \cdot \pi^{2k} (x-2)^{2k}} < 1$$

или, сокращая дробь, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi^2 (x-2)^2}{4^2 (2k+1)(2k+2)} < 1, \\ \frac{\pi^2}{4^2} (x-2)^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} < 1, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (x-2)^2 < \frac{4^2}{\pi^2} \lim_{k \rightarrow \infty} (2k+1)(2k+2), \\ (x-2)^2 < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $-\infty < x-2 < +\infty$, откуда
 $-\infty < x < +\infty$.

Таким образом, выписанный нами ряд сходится при всех значениях x .

Наконец, исследуем остаточный член в формуле Тейлора:

$$R_{2k}(x) = (x-2)^{2k+1} \frac{\pi^{2k+1} \sin \left[\frac{\pi \xi}{4} + (2k+1) \frac{\pi}{2} \right]}{4^{2k+1} (2k+1)!}.$$

Здесь $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $\left| \sin \left[\frac{\pi \xi}{4} + (2k+1) \frac{\pi}{2} \right] \right| \leq 1$

при любых k и ξ , а выражение $\frac{(x-2)^{2k+1}}{(2k+1)!} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и любых конечных x . В самом деле, применив признак Даламбера к ряду с общим членом $\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}$, убедимся в том, что он сходится, а, значит, общий член стремится к нулю.

Таким образом, $R_{2k}(x) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и, значит, разложение в ряд

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi x}{4} = 1 - \frac{\pi^2}{4^2 \cdot 2!} (x-2)^2 + \frac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!} (x-2)^4 - \dots \\ \dots + (-1)^k \frac{\pi^{2k}}{4^{2k} (2k)!} (x-2)^{2k} + \dots \end{aligned}$$

справедливо при всех значениях x .

Замечание 1. При разложении в ряд многих элементарных функций можно пользоваться известными разложениями в ряд по степеням x (ряд Маклорена) функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$ (см. Фролов, 2, § 4, 5, 6, или Фихтенгольц, II, п^он^о 253, 256, 258). Мы здесь приводим разложения в ряд указанных функций ввиду особой важности этих рядов:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots \\ (-\infty < x < \infty), \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots \\ (-\infty < x < \infty), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \\ (-1 < x \leq 1), \quad (4) \end{aligned}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1). \quad (5)$$

Частным случаем разложения (5) является разложение (геометрическая прогрессия):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

$$(-1 < x < 1). \quad (5')$$

Эти формулы рекомендуем запомнить.

Обращаем внимание читателя на то, что ряды для e^x , $\sin x$ и $\cos x$ сходятся к соответствующим функциям при всех значениях x , а радиус сходимости рядов для $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$ равен 1.

Формулами (1) — (5) можно пользоваться и для разложения соответствующих функций в ряд Тейлора, т. е. для разложения функций по целым положительным степеням $(x-a)$. Для этого над заданной функцией необходимо произвести такие тождественные преобразования, чтобы получить одну из функций (1) — (5), в которой вместо x стоит $k(x-a)^m$, где k — постоянное, m — целое положительное число. Конечно, если таких преобразований сделать не удастся, то следует произвести разложение по формуле Тейлора.

Воспользуемся указанным приемом для решения только что рассмотренного примера 1, а именно разложим в ряд Тейлора функцию.

$$y = \sin \frac{\pi x}{4}$$

в окрестности точки $x = 2$.

Решение. Произведем над заданной функцией тождественные преобразования такие, чтобы под знаком функции получить выражение $(x-2)$:

$$\sin \frac{\pi}{4}x = \sin \frac{\pi}{4}(x-2+2) = \sin \left[\frac{\pi}{4}(x-2) + \frac{\pi}{2} \right] =$$

$$= \cos \frac{\pi}{4}(x-2).$$

Теперь воспользуемся разложением (3), в котором на место x поставим $\frac{\pi}{4}(x-2)$, получим:

$$\cos \frac{\pi}{4}(x-2) = 1 - \frac{\pi^2(x-2)^2}{4^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4(x-2)^4}{4^4 \cdot 4!} - \dots$$

$$\dots + (-1)^k \frac{\pi^{2k}(x-2)^{2k}}{4^{2k}(2k)!} + \dots$$

Полученный ряд сходится к заданной функции при

$$-\infty < \frac{\pi}{4}(x-2) < \infty,$$

т. е. при

$$-\infty < x < \infty.$$

Таким образом,

$$\sin \frac{\pi}{4}x = 1 - \frac{\pi^2(x-2)^2}{4^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4(x-2)^4}{4^4 \cdot 4!} - \dots$$

$$\dots + (-1)^k \frac{\pi^{2k}(x-2)^{2k}}{4^{2k}(2k)!} + \dots$$

при $-\infty < x < \infty$.

Замечание 2. Приведенные решения примера 1 являются иллюстрацией теоремы о единственности разложения функции в степенной ряд. Сущность этой теоремы состоит в том, что в окрестности одной и той же точки не может быть получено два различных степенных ряда, которые сходились бы к одной и той же функции, каким бы способом это разложение не производилось.

Пример 2. Разложить в ряд Маклорена функцию:
 $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Решение. Имеем:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x);$$

пользуясь формулой (4), можем записать:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots,$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

Отсюда находим:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \\ + \dots - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \right).$$

Раскрывая скобки, переставляя члены ряда и делая приведение подобных, получим:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \\ = 2x + \frac{2x^3}{3} + \dots + \frac{2x^{2k+1}}{2k+1} + \dots .$$

Очевидно, что полученный ряд сходится при $-1 < x < 1$, так как он составлен из двух рядов, каждый из которых сходится в промежутке $-1 < x < 1$. Здесь мы имеем право перегруппировывать члены ряда, делая при этом приведение подобных, так как каждый из полученных рядов сходится абсолютно внутри интервала сходимости, т. е. при $-1 < x < 1$.

Таким образом,

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots \right) (-1 < x < 1).$$

Пример 3. Разложить функцию $y = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 3$.

Решение. Произведем тождественные преобразования функции $\frac{1}{x}$ такие, чтобы при разложении можно было воспользоваться известным разложением (5'). А именно:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x-3+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-3}{3}} .$$

Теперь воспользуемся разложением (5'), в котором на место x подставим $\frac{x-3}{3}$ и все члены ряда умножим на $\frac{1}{3}$.

Получим:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{(x-3)}{3 \cdot 3} + \frac{(x-3)^2}{3 \cdot 3^2} - \frac{(x-3)^3}{3 \cdot 3^3} + \dots \\ \dots + (-1)^n \frac{(x-3)^n}{3 \cdot 3^n} + \dots .$$

Полученный ряд сходится при

$$-1 < \frac{x-3}{3} < 1$$

или

$$-3 < x-3 < 3, \quad 0 < x < 6.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ разложением

подынтегральной функции в ряд Маклорена.

Решение. Как известно, этот интеграл «неберущийся», т. е. его нельзя выразить через элементарные функции. Для отыскания данного интеграла разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, а затем почленно проинтегрируем. (Степенной ряд сходится равномерно, поэтому его можно почленно интегрировать.)

Разлагаем функцию $\frac{\sin t}{t}$ в степенной ряд. Воспользовавшись разложением (2), получим:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots,$$

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{t^{2k-2}}{(2k-1)!} + \dots,$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)! (2k-1)} + \dots$$

Интервал сходимости полученного ряда будет таким же, что и интервал сходимости ряда для подынтегральной функции. Поэтому полученная формула верна при всех значениях x , т. е. при $-\infty < x < \infty$.

Функцию $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ называют *интегральным синусом*

и обозначают $\text{si } x$. Таким образом, мы получили разложение в ряд Маклорена функции $\text{si } x$.

Пример 5. Разложить в ряд по степеням x функцию:

$$f(x) = \text{arctg} \frac{2x}{2-x^2}.$$

Решение. На первый взгляд кажется, что для разложения этой функции в ряд нельзя воспользоваться готовыми разложениями (1) — (5) и нужно применять формулу Тейлора, которая требует громоздких вычислений (найти n -ю производную, вычислить коэффициенты ряда, произвести утомительное исследование поведения остаточного члена и т. д.). Однако дело упростится, если разложим в ряд производную $f'(x)$ и почленным интегрированием получим разложение в ряд $f(x)$.

В самом деле, находим производную:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{2-x^2}\right)^2} \cdot \frac{2(2-x^2) + 2x \cdot 2x}{(2-x^2)^2} = \frac{4-2x^2+4x^2}{(2-x^2)^2+4x^2} = \\ &= \frac{4+2x^2}{4+x^4} = \frac{1+\frac{x^2}{2}}{1+\frac{x^4}{4}} = \left(1+\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{x^4}{4}} \quad (x \neq \pm\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Теперь разложим в ряд по степеням x функцию $\frac{1}{1+\frac{x^4}{4}}$.

Воспользовавшись разложением (5'), в котором на место x подставим $\frac{x^4}{4}$, будем иметь:

$$\frac{1}{1+\frac{x^4}{4}} = 1 - \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^8}{2^4} - \frac{x^{12}}{2^6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{2n}} + \dots \quad (*)$$

Этот ряд сходится при

$$\left|\frac{x^4}{4}\right| < 1 \text{ или } |x| < \sqrt{2}, \text{ или } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Умножив ряд (*) на $\left(1+\frac{x^2}{2}\right)$, получим разложение в ряд по степеням x производной $f'(x)$:

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{1+\frac{x^4}{4}} &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2^2} - \frac{x^6}{2^3} + \frac{x^8}{2^4} + \frac{x^{10}}{2^5} - \dots \\ &\dots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{2n}} + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{2n+1}} + \dots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{2^3} - \frac{x^8}{2^4} + \frac{x^{10}}{2^5} - \dots + (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n}}{2^n} + \dots = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n}}{2^n}.
\end{aligned}$$

Он сходится так же, как и ряд (*) при $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, так как от умножения степенного ряда на целую рациональную функцию от x (многочлен) его интервал сходимости не изменяется.

Таким образом,

$$f'(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{1 + \frac{x^4}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n}}{2^n}.$$

Наконец, почленно интегрируем полученный ряд для производной:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{1 + \frac{x^4}{4}} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n}}{2^n} dx, \\
\operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x} \Big|_0^x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n+1}}{2^n (2n+1)} \Big|_0^x.
\end{aligned}$$

Подставляя пределы интегрирования, окончательно получим:

$$\operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n+1}}{2^n (2n+1)}$$

при $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

Пример 6. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5},$$

пользуясь разложением функций в ряд Маклорена.

* Запись $[a]$ означает, что берется *целая часть* числа a , которая определяется следующим образом: если $a = n + r$, где n — целое число и $0 \leq r < 1$, то $[a] = n$. Например: $[2,5] = 2$, $[3,98] = 3$, $[4] = 4$, $[-1,3] = -2$.

Решение. Несколько преобразуем данное выражение:

$$\begin{aligned} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5} &= \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x - x^3 \cos x}{x^5 \cos x} = \\ &= \frac{2 \sin x - \sin 2x - x^3 \cos x}{x^5 \cos x} \end{aligned}$$

Используя формулы (2) и (3), пишем разложение полученных функций в степенные ряды в окрестности точки $x = 0$:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \\ \sin 2x &= 2x - \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{2^5 x^5}{5!} - \frac{2^7 x^7}{7!} + \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Подставляя полученные разложения в данное выражение, переставляя члены и делая приведение подобных членов в числителе, получим:

$$\begin{aligned} 2x - \frac{2x^3}{6} + \frac{2x^5}{120} - \frac{2x^7}{5040} + \dots - 2x + \frac{8x^3}{6} - \\ - \frac{32x^5}{120} + \frac{128x^7}{5040} - \dots - x^3 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^7}{24} + \frac{x^9}{720} - \dots = \\ = \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{60}x^7 + \dots \end{aligned}$$

В знаменателе получим:

$$x^5 - \frac{x^7}{2!} + \frac{x^9}{4!} - \dots$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{60}x^7 + \dots}{x^5 - \frac{x^7}{2!} + \frac{x^9}{4!} - \dots} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{60}x^2 + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Пример 7. Принимая равенства*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

за определение функций $\sin x$ и $\cos x$, доказать, что

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Решение. Чтобы вывести указанную в задаче формулу, необходимо перемножить ряды функций $\sin x$ и $\cos x$. Для этого составляем бесконечную прямоугольную таблицу парных произведений:

$x \cdot 1$	$-\frac{x^3}{3!} \cdot 1$	$\frac{x^5}{5!} \cdot 1 \dots$
$-x \cdot \frac{x^2}{2!}$	$\frac{x^3}{3!} \frac{x^2}{2!}$	$-\frac{x^5}{5!} \frac{x^2}{2!} \dots$
$x \cdot \frac{x^4}{4!}$	$-\frac{x^3}{3!} \frac{x^4}{4!}$	$\frac{x^5}{5!} \frac{x^4}{4!} \dots$
.....
$(-1)^n x \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$(-1)^{n+1} \frac{x^3}{3!} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$(-1)^{n+2} \frac{x^5}{5!} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \dots$
.....

Выписываем парные произведения по диагоналям:

$$x - \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{2!} \right) + \left(\frac{x^5}{5!} + \frac{x^5}{3!2!} + \frac{x^5}{1!4!} \right) - \dots$$

* Всякую аналитическую функцию (т. е. функцию, которую можно представить в виде степенного ряда) можно определить через ее степенной ряд и, исходя из этого определения, вывести все свойства функции. Этот способ определения функции употребляется при задании некоторых функций.

$$\dots + (-1)^{n-1} \left[\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n-1}}{(2n-3)!2!} + \frac{x^{2n-1}}{(2n-5)!4!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{1!(2n-2)!} \right] + \dots$$

Произведем тождественные преобразования над общим членом этого ряда:

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-1} \left[\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n-1}}{(2n-3)!2!} + \frac{x^{2n-1}}{(2n-5)!4!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{1!(2n-2)!} \right] = (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \left[1 + \frac{(2n-2)(2n-1)}{2!} + \frac{(2n-4)(2n-3)(2n-2)(2n-1)}{4!} + \dots + (2n-1) \right] = \\ & = (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \left[C_{2n-1}^0 + C_{2n-1}^2 + C_{2n-1}^4 + \dots + C_{2n-1}^{2n-2} \right] = \\ & = (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{2^{2n-1}}{2} = (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \frac{1}{2} * \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \cos x &= \frac{1}{2} \cdot 2x - \frac{1}{2} \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{1}{2} \frac{(2x)^5}{5!} - \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \frac{1}{2} \sin 2x, \end{aligned}$$

т. е.

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

72. Разложить функцию $y = 2^x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$.

73. Разложить функцию $y = \cos(x + \alpha)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ (ряд Маклорена).

* Напомним, что сумма биномиальных коэффициентов

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

В нашем примере в квадратных скобках выписаны биномиальные коэффициенты ряда C_{2n-1}^{2k} , а так как сумма биномиальных коэффициентов стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов стоящих на нечетных местах, то сумма, стоящая в скобках, будет равна $\frac{2^{2n-1}}{2}$.

В задачах 74—78, пользуясь формулами разложения (1)—(5), разложить заданные функции в ряд по степеням x (в ряд Маклорена).

$$74. y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$75. y = \cos^2 x.$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

$$76. y = \frac{x}{1+x-2x^2}.$$

У к а з а н и е. Разложите данную дробь на простейшие.

$$77. y = \ln(1+x+x^2+x^3).$$

$$78. y = \frac{1+x}{(1-x^2)^2}.$$

В задачах 79—81, применяя дифференцирование, разложить заданные функции в ряд по степеням x .

$$79. y = (1+x) \ln(1+x).$$

$$80. y = \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}.$$

$$81. y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$82. \text{Разложить } \frac{1}{x^2+4x+7} \text{ в ряд по степеням } (x+2).$$

$$83. \text{Разложить } e^x \text{ в ряд по степеням } (x+2).$$

$$84. \text{Разложить } \sqrt{x} \text{ в ряд по степеням } (x-4).$$

В задачах 85—86 найти данные интегралы путем разложения подынтегральной функции в ряд Маклорена.

$$85. \int_0^x e^{t^2} dt.$$

$$86. \int_0^x \frac{\sqrt[3]{1+t^3}-1}{t^2} dt.$$

87. Пользуясь разложением функции в ряд по степеням x , вычислить пределы:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x(e^x-1)};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right).$$

88. Пусть

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Дсказать непосредственно, что

$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y).$$

§ 5. Приближенные вычисления с помощью рядов

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел 1, гл. III, § 4—8, или Фихтенгольц, II, гл. XV, п°п° 260—262.

Пример 1. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,0001.
Решение. Воспользуемся биномиальным рядом:

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots \\ \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots,$$

который, как известно, сходится при $-1 < x < 1$. Представим теперь данный корень в виде

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125 + 5} = 5 \sqrt[3]{1 + \frac{5}{125}} = 5 \left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Для функции $(1 + x)^{\frac{1}{3}}$ получим следующее разложение:

$$(1 + x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!}x^2 + \\ + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)}{3!}x^3 + \dots = \\ = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4 \cdot 4!}x^4 + \dots$$

Подставляя вместо x число $\frac{1}{25}$, получим числовой ряд:

$$\left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3 \cdot 5^2} - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2! \cdot 5^4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3! \cdot 5^6} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4 \cdot 4! \cdot 5^8} + \dots$$

Мы здесь имеем знакочередующийся ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница, поэтому если возьмем в качестве приближенного значения суммы этого ряда сумму n первых его членов, то будем иметь абсолютную погреш-

ность, меньшую, чем первый отброшенный член. Так как мы должны вычислить значение корня с точностью до 0,0001, то для подсчета нужно взять первые три члена ряда. В самом деле, уже четвертый член, умноженный на пять, будет

$$\frac{5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!5^6} = \frac{1 \cdot 2}{27 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5^4} = \frac{1}{81 \cdot 625} < 0,0001.$$

Производим вычисления (умножаем каждый член ряда на 5):
 $5,00000 + 0,06667 - 0,00089 = 5,06578.$

Таким образом,

$$\sqrt[3]{130} \approx 5,0658 \text{ (с точностью до } 0,0001).$$

Замечание. Бином, для которого справедлива формула разложения (5), состоит из 1 и второго слагаемого, которое должно быть меньше 1, поэтому подкоренное число мы разбили на 2 слагаемых: первое 125 — из него легко извлекается кубический корень, и второе слагаемое 5. Здесь нельзя было число 130 разбивать, например, на такие два слагаемых, как $64 + 66$; хотя из 64 и извлекается корень 3-й степени, но второе слагаемое, деленное на 64, было бы больше единицы, и формула разложения для бинома была бы неприменима. Число 130 можно было бы представить и так:

$$130 = 216 - 86,$$

тогда
$$\sqrt[3]{130} = 6 \sqrt[3]{1 - \frac{86}{216}}.$$

Как легко проверить, такое представление числа $\sqrt[3]{130}$ было бы менее удачным, так как $\frac{86}{216} > \frac{5}{125}$ и числовой ряд сходил бы медленнее; для вычислений с нужной нам точностью пришлось бы взять больше членов, кроме того, мы получили бы знакопостоянный числовой ряд, для которого оценка погрешности производится сложнее.

Пример 2. Вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx,$$

взяв 3 члена разложения в ряд подынтегральной функции; указать допущенную при этом погрешность.

Решение. Разложив подынтегральную функцию в степенной ряд

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots,$$

получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx = \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots \right]_0^{\frac{1}{4}} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 \cdot 3} + \frac{1}{4^5 \cdot 2! \cdot 5} - \frac{1}{4^7 \cdot 3! \cdot 7} + \dots \end{aligned}$$

Так как полученный ряд знакпеременный, то для приближенного значения интеграла, взяв первые три члена ряда, мы будем иметь абсолютную погрешность, меньшую, чем первый отброшенный член, т. е. меньше, чем $\frac{1}{4^7 \cdot 3! \cdot 7} < 0,00001$. Поэтому, производя вычисления с точностью до 0,00001, будем иметь:

$$0,250000 - 0,005208 + 0,000098 = 0,244890.$$

Таким образом,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx 0,24489 \text{ (с точностью до } 0,00001).$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} \cdot e^x dx$ с точностью до 0,001.

Решение. По формуле (1) § 4 имеем:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Умножив все члены ряда на \sqrt{x} , получим функциональный ряд:

$$\sqrt{x} e^x = \sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} + \dots + \frac{x^n\sqrt{x}}{n!} + \dots \quad (*)$$

Члены полученного функционального ряда не больше членов числового ряда

$$\sqrt{a} + a\sqrt{a} + \frac{a^2\sqrt{a}}{2!} + \dots + \frac{a^n\sqrt{a}}{n!} + \dots, \quad a > 0,$$

который сходится (это легко установить, используя признак Даламбера). Следовательно, по признаку Вейерштрасса функциональный ряд (*) сходится равномерно при $0 \leq x < \infty$.

Из равномерной сходимости функционального ряда вытекает, что его можно почленно интегрировать. Поэтому

$$\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx =$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{9}} \left(\sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} + \dots + \frac{x^n\sqrt{x}}{n!} + \dots \right) dx = \\ & = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{2x^3\sqrt{x}}{2!7} + \dots + \frac{2x^{n+1}\sqrt{x}}{n!(2n+3)} + \dots \right]_0^{\frac{1}{9}} = \\ & = \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{2! \cdot 7 \cdot 3^7} + \dots + \frac{2}{n!(2n+3)3^{2n+3}} + \dots \\ & \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Выясним, сколько членов числового ряда необходимо взять для вычисления интеграла с точностью до 0,001. Для этого сначала оценим остаточный член:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{2}{n!(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} + \frac{2}{(n+1)!(2n+5) \cdot 3^{2n+5}} + \dots < \\ &< \frac{2}{n!(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} \left[1 + \frac{1}{n \cdot 3^2} + \frac{1}{n^2 \cdot 3^4} + \dots \right]^* = \\ &= \frac{2}{n!(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n \cdot 3^2}} = \frac{2}{(n-1)!(2n+3) \cdot 3^{2n+1} (3^2n-1)}. \end{aligned}$$

* Мы здесь в квадратных скобках уменьшили знаменатели слагаемых заменяя $(n+k)!$ на $n! n^k$, а $2n+3+2k$ на $2n+3$, от этого величина в квадратных скобках только увеличилась и, следовательно, усилилась оценка R_n .

Очевидно, что для вычисления интеграла с точностью до 0,001, достаточно взять два члена полученного числового ряда. В самом деле,

$$R_2 < \frac{2}{7 \cdot 3^5 \cdot 17} < 6 \cdot 10^{-5}.$$

Производя вычисления с точностью до 0,001, будем иметь:

$$0,0242 + 0,0016 = 0,0258.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{9} \int_0^1 \sqrt{x} e^x dx \approx 0,026 \text{ с точностью до } 0,001.$$

89. Вычислить $\sqrt[5]{250}$ с точностью до 0,001.

90. Вычислить $\sin 18^\circ$ с точностью до 0,001.

Указание. 18° соответствует $\frac{\pi}{10}$ радиан; $\frac{\pi}{10} \approx 0,3142$.

91. Вычислить $\ln 1,2$ с точностью до 0,0001.

92. Вычислить $\ln 3$ с точностью до 0,0001.

Указание. Воспользоваться разложением в степенной ряд функции: $\ln \frac{1+x}{1-x}$ (см. стр. 49).

93. Выяснить происхождение приближенной формулы:

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a > 0), \text{ вычислить с ее помощью } \sqrt{23},$$

положив $a = 5$, и оценить допущенную при этом ошибку.

94. Сколько нужно взять членов ряда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

чтобы найти число e с точностью до 0,0001?

В задачах 95—96 вычислить приближенное значение определенных интегралов, взяв указанное число членов разложения в ряд подынтегральной функции. Указать допущенные при этом погрешности.

$$95. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad (\text{два члена}).$$

$$96. \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^3 \operatorname{arctg} x \, dx \text{ (два члена).}$$

$$97. \text{ Вычислить } \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x \, dx \text{ с точностью до } 0,001.$$

§ 6. Ряды Фурье

Задачи этого параграфа относятся к теме, входящей в программу по математике для специальности «физика». Минимальный теоретический материал рекомендуется изучить по учебнику: Фихтенгольц, II, гл. XXIV, п°п° 396, 397, 398, 399 (стр. 379, 380), 402 (доказательство можно пропустить), 403, 404, 405. После разбора решенных задач настоящего параграфа рекомендуется также рассмотреть примеры, приведенные в п° 406 учебника Фихтенгольца.

Мы будем заниматься разложением в ряд Фурье кусочно-дифференцируемых функций (см. Фихтенгольц, II, п° 402).

Эти функции чаще всего встречаются в приложениях. Чтобы лучше познакомиться с понятием кусочно-дифференцируемой функции, рассмотрим функцию на полуинтервале $(-1, 3]$, заданную выражением:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } -1 < x < 1, \\ 1,5 & \text{при } x = 1, \\ 3 - x & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 2 & \text{при } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

График функции $f(x)$ изображен на рисунке 1.

Производная $f'(x)$ рассматриваемой функции существует на интервалах $(-1, 1)$; $(1, 2)$; $(2, 3)$ и определяется соотношением:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } -1 < x < 1, \\ -1 & \text{при } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{при } 2 < x < 3. \end{cases}$$

График $f'(x)$ изображен на рисунке 2.

Найдем двусторонние пределы $f(x)$ и ее производной $f'(x)$ на стыках указанных интервалов, а также односто-

ронные пределы на концах промежутка $[-1, 3]$ (справа и слева соответственно). Для $f(x)$ имеем:

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} x^2 = 1,$$

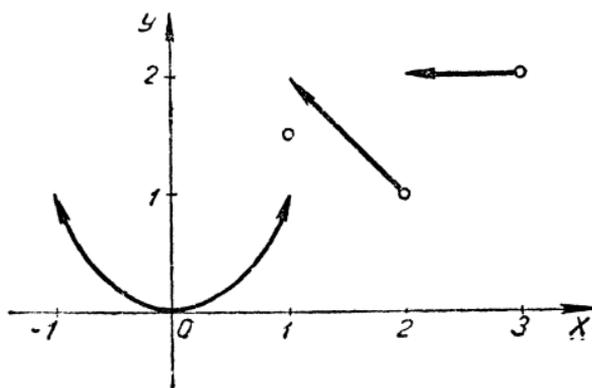


Рис. 1.

$f(-1+0)$ означает предел справа функции $f(x)$ в точке $x = -1$;

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1,$$

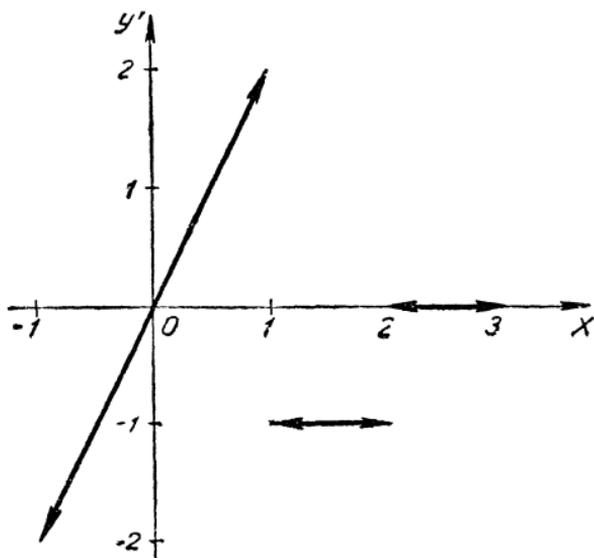


Рис. 2.

$f(1-0)$ означает предел слева функции $f(x)$ в точке $x = 1$;

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (3-x) = 2;$$

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (3-x) = 1 = f(2);$$

$$f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} 2 = 2;$$

$$f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} 2 = 2.$$

Для $f'(x)$ получаем аналогично:

$$f'(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} 2x = -2;$$

$$f'(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2x = 2;$$

$$f'(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (-1) = -1;$$

$$f'(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (-1) = -1;$$

$$f'(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (0) = 0;$$

$$f'(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (0) = 0.$$

Итак, $f(x)$ вместе со своей производной $f'(x)$ непрерывны на конечном числе примыкающих интервалов $(-1, 1)$; $(1, 2)$; $(2, 3)$, составляющих (при включении также и концов этих интервалов) промежутков $[-1, 3]$; на концах интервалов функции $f(x)$ и $f'(x)$ имеют односторонние конечные пределы. Следовательно, $f(x)$ полностью соответствует определению кусочно-дифференцируемой функции на $[-1, 3]$. На концах интервалов (указанных в определении кусочно-дифференцируемой функции) $f(x)$ может быть определена совершенно произвольно, т. е. независимо от значений лево- и правосторонних пределов. Так, значение рассматриваемой функции в точке $x = 1$ равно 1,5, тогда как предел слева равен 1, а справа равен 2.

Может случиться, что на конце интервала значение кусочно-дифференцируемой функции равно пределу слева (или справа) в этой точке. Так, в нашем примере значение функции в точках $x = 2$ и $x = 3$ равно соответствующим левосторонним пределам. Наконец, на стыках интервалов кусочно-дифференцируемая функция может быть и непрерывной, но в этих точках не существует производной. Такой функцией является функция, разобранный далее, в примере 1 настоящего параграфа.

Определение. Точка $x = x_0$ называется *правильной* точкой функции $f(x)$, если

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}, \quad (1)$$

т. е. если в точке $x = x_0$ значение функции равно среднему арифметическому ее пределов слева и справа. Так, точка $x = 1$ является правильной точкой рассматриваемой функции (хотя и является точкой разрыва 1-го рода), так как

$$1,5 = f(1) = \frac{f(1 - 0) + f(1 + 0)}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5.$$

Кусочно-дифференцируемую функцию можно переопределить так, чтобы стыки упомянутых выше интервалов были правильными точками. В нашем примере в точке $x = 2$ пришлось бы положить значение функции равным 1,5, так как

$$\frac{f(2 - 0) + f(2 + 0)}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5.$$

Разумеется, все точки непрерывности являются правильными точками в указанном смысле.

Замечание. Определение понятия определенного интеграла от кусочно-дифференцируемой функции остается обычным, и для его вычисления проще всего взять сумму интегралов по промежуткам, полученным включением концов интервалов непрерывности (на концах интервалов функции доопределяются по непрерывности). Так в нашем примере:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 f(x) dx &= \int_{-1}^1 x^2 dx + \int_1^2 (3 - x) dx + \int_2^3 2 dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 + \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 + 2x \Big|_2^3 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{25}{6}. \end{aligned}$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периодическую с периодом 2π и на интервале $-\pi < x \leq \pi$, заданную выражением:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi < x \leq 0, \\ \frac{x^2}{\pi} & \text{при } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

График функции $f(x)$ изображен на рисунке 3.

Данная функция является кусочно-дифференцируемой, а интервалами непрерывности $f(x)$ и $f'(x)$ будут $(-\pi + 2\pi k, 2\pi k)$ и $(2\pi k, \pi + 2\pi k)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). В нашем случае и стыки интервалов являются точками непрерывности. В силу периодичности достаточно проверить точки $x = 0$ и $x = \pi$.

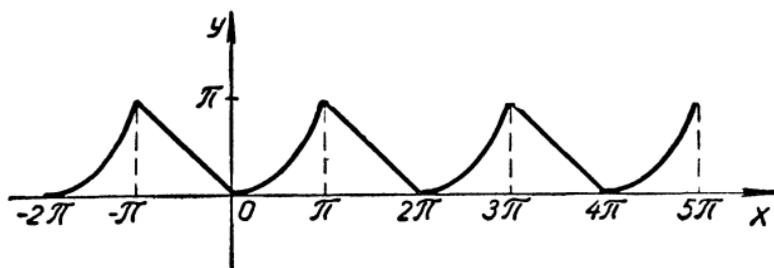


Рис. 3.

Проверяем непрерывность при $x = 0$:

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-x) = 0,$$

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{\pi} = 0,$$

$$f(0) = (-x)|_{x=0} = 0.$$

Утверждение относительно непрерывности функции в точке $x = 0$ установлено, так как $f(-0) = f(+0) = f(0)$.

Проверим теперь непрерывность при $x = \pi$:

$$f(\pi - 0) = \lim_{x \rightarrow \pi - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi - 0} \frac{x^2}{\pi} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi,$$

$$f(\pi + 0) = \lim_{x \rightarrow \pi + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi + 0} (-x) = \pi^*,$$

$$f(\pi) = \frac{x^2}{\pi} \Big|_{x=\pi} = \pi.$$

Таким образом, непрерывность $f(x)$ и в точке $x = \pi$ доказана.

* Равенство $\lim_{x \rightarrow \pi + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi + 0} f(x)$ имеет место на основании периодичности $f(x)$ и используется для удобного вычисления предела, так как мы можем в этом случае пользоваться аналитическим выражением для $f(x)$ в $(-\pi, \pi)$.

Производная рассматриваемой функции определена и непрерывна при $x \neq \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Значения $x = \pi k$ являются точками разрыва 1-го рода для $f'(x)$. (Проверьте эти утверждения!)

Таким образом, к нашей кусочно-дифференцируемой функции мы можем применить теорему (Фихтенгольц, II, н° 402) о разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Ряд (2), как указано в теореме, сходится во всех точках числовой оси, а его сумма в точке $x = x_0$, обозначаемая S_0 , дается формулой:

$$S_0 = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}, \quad (5)$$

т. е. ряд (2) сходится к $f(x)$ во всех правильных точках $x = x_0$. В нашей задаче сходимость ряда (2) к $f(x)$ имеет место на всей числовой оси, так как $f(x)$ всюду непрерывна, а, следовательно, все точки ее являются правильными.

Проведем вычисление коэффициентов ряда Фурье по формулам (3) и (4) для заданной функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6} \pi, \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \cos nx \, dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

($n = 1, 2, \dots$),

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \sin nx \, dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \sin nx \, dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx$$

($n = 1, 2, \dots$).

В выражении для a_n мы сделали преобразование:

$$\int_{-\pi}^0 (-x) \cos nx \, dx = \int_0^{-\pi} x \cos nx \, dx = \int_0^{\pi} (-t) \cos(-nt) (-dt) =$$

$$= \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt = \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx,$$

воспользовавшись подстановкой

$$\begin{array}{l} x = -t, \quad | \quad x = 0, \quad t = 0, \\ dx = -dt, \quad | \quad x = -\pi, \quad t = \pi, \end{array}$$

и в последнем равенстве изменили обозначение: t заменили на x .

Преобразование выражения для b_n производится аналогично с учетом нечетности синуса.

Найдем теперь методом интегрирования по частям входящие в выражения для a_n и b_n интегралы:

$$I_1 = \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx; \quad I_2 = \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx;$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx; \quad I_4 = \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx.$$

Вычислим значение I_1 . Полагаем

$$u = x, \quad dv = \cos nx \, dx,$$

откуда

$$du = dx, \quad v = \frac{\sin nx}{n},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx \, dx = \frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^\pi + \\ &+ \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^\pi = \frac{\pi \sin n\pi}{n} - \frac{0 \cdot \sin 0}{n} + \frac{1}{n^2} \cos n\pi - \\ &- \frac{1}{n^2} \cos 0 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} -\frac{2}{n^2} & \text{при } n \text{ нечетном} \\ 0 & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases} \end{aligned}$$

Мы использовали равенства:

$$\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = \begin{cases} -1 & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 1 & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Вычисляем I_2 . Полагаем

$$u = x, \quad dv = \sin nx \, dx,$$

откуда

$$du = dx, \quad v = -\frac{\cos nx}{n}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx \, dx = -\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^\pi + \\ &+ \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^\pi = -\frac{\pi \cos n\pi}{n} + \frac{0 \cdot \cos 0}{n} + \frac{1}{n^2} \sin n\pi - \\ &- \frac{1}{n^2} \sin 0 = -\frac{\pi (-1)^n}{n} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

Найдем значение I_3 . Полагаем

$$u = x^2, \quad dv = \cos nx \, dx,$$

откуда

$$du = 2x \, dx, \quad v = \frac{\sin nx}{n}.$$

$$I_3 = \frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \frac{2}{n} \int_0^\pi x \sin nx dx = \frac{\pi^2 \sin n\pi}{n} -$$

$$- \frac{0 \cdot \sin 0}{n} - \frac{2}{n} \left[(-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} \right] = (-1)^{n+2} \frac{2\pi}{n^2} = (-1)^n \frac{2\pi}{n^2}.$$

Мы использовали значение I_2 .

Вычислим, наконец, I_4 . Полагаем

$$u = x^2, \quad dv = \sin nx dx,$$

откуда

$$du = 2x dx, \quad v = -\frac{\cos nx}{n}.$$

Таким образом,

$$I_4 = -\frac{x^2 \cos nx}{n} \Big|_0^\pi + \frac{2}{n} \int_0^\pi x \cos nx dx =$$

$$= -\frac{\pi^2 \cos n\pi}{n} + \frac{0 \cdot \cos 0}{n} + \frac{2}{n} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right] = -\frac{\pi^2 (-1)^n}{n} +$$

$$+ \frac{2}{n^3} \left[(-1)^n - 1 \right] = (-1)^{n+1} \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} \left[(-1)^n - 1 \right].$$

Подставим найденные значения интегралов в выражения для a_n и b_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} I_1 + \frac{1}{\pi^2} I_3 = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} + \frac{1}{\pi^2} (-1)^n \frac{2\pi}{n^2} =$$

$$= \frac{(-1)^n - 1 + (-1)^n 2}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n \cdot 3 - 1}{\pi n^2} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ \frac{2}{\pi n^2} & \text{при } n \text{ четном,} \end{cases}$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} I_2 + \frac{1}{\pi^2} I_4 = -\frac{1}{\pi} (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \left\{ (-1)^{n+1} \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} [(-1)^n - 1] \right\} = (-1)^n \frac{1}{n} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \frac{2}{\pi^2 n^3} [(-1)^n - 1] = \frac{2}{\pi^2 n^3} [(-1)^n - 1] =$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2 n^3} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ четном,} \end{cases}$$

так как сумма $\frac{1}{n} [(-1)^n + (-1)^{n+1}] = 0$ при всех n (четных и нечетных). Проверьте это!

Теперь мы можем записать разложение нашей функции в ряд Фурье соответственно формуле (2):

$$f(x) = \frac{5}{12}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n \cdot 3 - 1}{\pi n^2} \cos nx + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi^2 n^3} [(-1)^n - 1] \sin nx \right\} = \frac{5}{12}\pi - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{\pi^2} \sin x + \\ + \frac{1}{2\pi} \cos 2x - \frac{4}{9\pi} \cos 3x - \frac{4}{9\pi^2} \sin 3x + \frac{1}{4\pi} \cos 4x + \dots$$

Замечание 1. Так как $f(x)$ и все функции $\cos nx$ и $\sin nx$ имеют общий период 2π , то при вычислении коэффициентов ряда Фурье в формулах (3) и (4) в качестве промежутка интегрирования можно брать любой промежуток длины 2π , например $[0, 2\pi]$ (см. Фихтенгольц, II, н° 399).

Замечание 2. Если $f(x)$ определена и является кусочно-дифференцируемой функцией лишь на $[-\pi, \pi]$, то ее разложение в ряд Фурье производится по уже приведенным формулам. Чтобы это обосновать, достаточно продолжить $f(x)$ как периодическую функцию с периодом 2π на всю числовую ось. При этом если $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то придется сначала переопределить значение исходной функции в точке $x = -\pi$ и $x = \pi$, чтобы обеспечить периодичность. Например, можно положить значение функции в точке $x = -\pi$ равным $f(\pi)$. Коэффициенты Фурье можно находить по продолженной таким образом функции с учетом замечания 1 (возможность брать в качестве промежутка интегрирования любой промежуток длины 2π). Сумма полученного ряда Фурье в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ равна

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} \quad (6)$$

(см. Фихтенгольц, II, н° 403).

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на промежутке $[-\pi, \pi]$ выражением:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Эта функция является кусочно-дифференцируемой на $[-\pi, \pi]$. (Проверьте!) Интервалами непрерывности $f(x)$ и $f'(x)$ являются $(-\pi, 0)$; $(0, \pi)$. График $f(x)$ изображен на рисунке 4.

Нам понадобятся значения пределов:

$$f(-\pi + 0), f(-0);$$

$$f(+0); f(\pi - 0).$$

Найдем их.

$$f(-\pi + 0) = \lim_{x \rightarrow -\pi + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi + 0} x = -\pi,$$

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} x = 0,$$

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \pi = \pi,$$

$$f(\pi - 0) = \lim_{x \rightarrow \pi - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi - 0} \pi = \pi.$$

Вычислим коэффициенты ряда Фурье (при этом мы воспользуемся результатами выкладок, сделанных в примере 1 на стр. 70 — 71).

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-\pi}^0 + \left. x \right|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \cos nx dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{-\pi} x \cos nx dx + \int_0^{\pi} \cos nx dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx + \left. \frac{\sin nx}{n} \right|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right] =$$

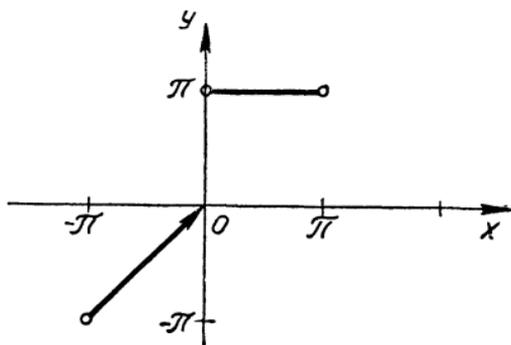


Рис. 4.

$$= \frac{1 + (-1)^{n+1}}{\pi n^2} = \begin{cases} \frac{2}{\pi n^2} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ четном,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \sin nx \, dx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \sin nx \, dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{-\pi} x \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx - \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} - \frac{\cos \pi n}{n} + \\ &+ \frac{\cos 0}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2 + 1}{n} = \\ &= \begin{cases} \frac{3}{n} & \text{при } n \text{ нечетном} \\ -\frac{1}{n} & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases} \end{aligned}$$

Выпишем ряд Фурье для нашей функции:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1} + 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2 + 1}{n} \sin nx \right] = \\ = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos x + 3 \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{2}{9\pi} \cos 3x + \\ + \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \end{aligned}$$

Этот ряд, очевидно, сходится к нашей функции $f(x)$ на интервалах непрерывности $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$. В точке $x=0$ сумма ряда Фурье в соответствии с формулой (5), равна

$$\frac{f(-0) + f(+0)}{2} = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

В точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ сумма ряда Фурье согласно (6) равна

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0.$$

Замечание. Если бы мы переопределили исходную функцию, положив ее в точке $x = 0$ равной $\frac{\pi}{2}$, а в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ равной нулю, то ряд Фурье (он, очевидно, остается прежним) для такой преобразованной функции сходилась бы к ней всюду.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на $[-2, 2]$ выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -2 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}x & \text{при } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Ее график изображен на рисунке 5.

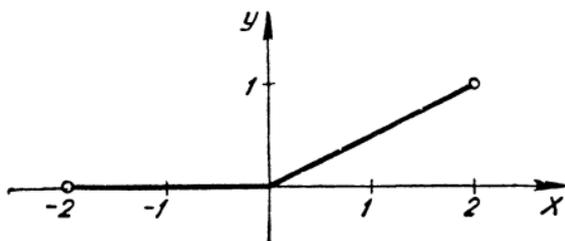


Рис. 5.

Интервалами непрерывности являются $(-2, 0)$ и $(0, 2)$.
Имеем:

$$f(-2+0) = f(-2) = 0; \quad f(-0) = f(+0) = f(0) = 0; \\ f(2-0) = f(2) = 1.$$

(Проверьте приведенные значения!)

Мы видим, что наша функция является непрерывной на $[-2, 2]$.

Ряд Фурье кусочно-дифференцируемой функции, заданной на $[-l, l]$ (см. Фихтенгольц, II, $\text{п}^\circ 404$), имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (7)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Он сходится на всей числовой оси.

Сумма ряда Фурье внутри $[-l, l]$ определяется согласно (5), а на концах промежутка $[-l, l]$, т. е. в точках $x = -l$ и $x = l$, равна

$$\frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}. \quad (10)$$

Выражения (7) — (10) являются естественным обобщением (2), (3), (4) и (6), а при $l = \pi$ тождественны последним.

В целом сумма ряда Фурье (7) является периодической функцией с периодом $2l$, кусочно-дифференцируемой, все точки разрыва которой являются правильными точками (см. определение на стр. 66), и совпадающей с $f(x)$ во всех точках непрерывности интервала $(-l, l)$.

(Продумайте, ясны ли вам все эти утверждения?)

В нашем примере $l = 2$ и ряд Фурье (7) сходится к $f(x)$ всюду на $(-2, 2)$, а в точках $x = -2$ и $x = 2$ его сумма согласно (10) равна

$$\frac{f(-2+0) + f(2-0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Вычислим теперь значения коэффициентов Фурье заданной функции:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x}{2} \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx. \end{aligned}$$

Произведем замену переменной: $x = \frac{2t}{\pi}$; тогда $dx = \frac{2}{\pi} dt$. Если мы последовательно дадим x значения 0 и 2, то по-

лучим новые пределы интегрирования: $t = 0$ и $t = \pi$.
Таким образом,

$$a_n = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} t \cos nt \frac{2}{\pi} dt = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} t \cos nt dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} -\frac{2}{\pi^2 n^2} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

При вычислении b_n также произведем замену $x = \frac{2t}{\pi}$
и воспользуемся результатами стр. 70:

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} t \sin nt \frac{2}{\pi} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} t \sin nt dt = \frac{1}{\pi^2} (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} = (-1)^{n+1} \frac{1}{\pi n}.$$

Выпишем найденный ряд Фурье:

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2\pi} \sin \pi x - \frac{2}{9\pi} \cos \frac{3\pi x}{2} +$$

$$+ \frac{1}{3\pi} \sin \frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{4\pi} \sin 2\pi x - \frac{2}{25\pi^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots$$

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в промежутке $[-2, 2]$ формулой $f(x) = \frac{1}{2} x$. Эта функция, очевидно, непрерывна в $[-2, 2]$, и, следовательно, внутри него ряд Фурье (7) имеет суммой $f(x)$. Сумма ряда (7) в точках $x = -2$ и $x = 2$ равна нулю. (Докажите!)

Вычислим коэффициенты Фурье искомого ряда:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^2 = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 x \cos \frac{\pi n x}{2} dx.$$

Интегрируем по частям. Полагаем

$$u = x, \quad dv = \frac{1}{4} \cos \frac{\pi n x}{2} dx,$$

откуда

$$du = dx, \quad v = \frac{1}{2\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi n} x \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_{-2}^2 - \frac{1}{2\pi n} \int_{-2}^2 \sin \frac{\pi n x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_{-2}^2 = 0, \end{aligned}$$

так как в обоих случаях двойные подстановки обращаются в нуль. (Проверьте!)

То, что интеграл $\frac{1}{4} \int_{-2}^2 x \cos \frac{\pi n x}{2} dx$ обращается в нуль,

является не случайностью, а следствием нечетности подинтегральной функции и симметричности относительно начала координат области интегрирования (см. Фихтенгольц, II, п° 405). Таким образом, при разложении в ряд Фурье на $[-l, l]$ нечетной функции фактически присутствуют лишь синусы. Аналогично, в разложении четной функции на этом же промежутке содержатся только косинусы.

Найдем коэффициенты b_n :

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 x \sin \frac{\pi n x}{2} dx.$$

Интегрируем по частям. Полагаем

$$u = x, \quad dv = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi n x}{2} dx,$$

тогда

$$du = dx, \quad v = -\frac{1}{2\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{2\pi n} x \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_{-2}^2 + \frac{1}{2\pi n} \int_{-2}^2 \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \\ &= \left[-\frac{1}{2\pi n} 2 \cos \pi n - \frac{1}{2\pi n} 2 \cos \pi n \right] + \frac{1}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_{-2}^2 = \\ &= -\frac{2}{\pi n} \cos \pi n = -\frac{2}{\pi n} (-1)^n = (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi n} = \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi n} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ -\frac{2}{\pi n} & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases} \end{aligned}$$

Запишем найденный ряд Фурье:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} &= \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{\pi} \sin \pi x + \\ &+ \frac{2}{3\pi} \sin \frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x + \dots \end{aligned}$$

Функции примеров 3 и 4 на интервале $(0, 2)$ совпадают, а их разложения в ряд Фурье не одинаковы. Это является иллюстрацией того, что функции, совпадающие на отдельных участках, но различные во всех точках любого, сколь угодно малого интервала, лежащего внутри $[-l, l]$, имеют разные коэффициенты разложения по $\cos \frac{\pi n x}{l}$ и $\sin \frac{\pi n x}{l}$. Так, функции примеров 3 и 4 отличаются во всех точках интервала $(-2, 0)$. (Продумайте, ясно ли вам утверждение этого абзаца в применении к кусочно-дифференцируемым функциям на $[-l, l]$!)

Если нам нужно разложить функцию, заданную в промежутке $[0, l]$, только по косинусам, то мы можем

продолжить ее как четную функцию на $[-l, 0]$, и тогда в разложении построенной на $[-l, l]$ функции будут содержаться лишь члены с $\cos \frac{\pi n x}{l}$.

Пример 5. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{2} x$, заданную на $[0, 2]$, в ряд по $\cos \frac{\pi n x}{l}$.

Эту задачу можно было бы решить, как только что доказано, продолжив ее как четную функцию на весь промежуток $[-2, 2]$. График продолженной функции изображен на рисунке 6.

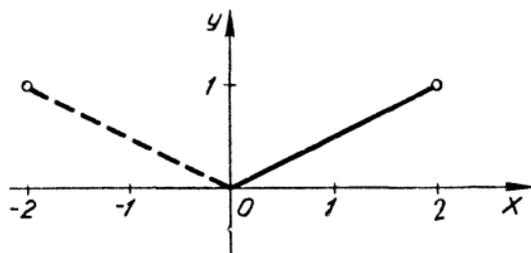


Рис. 6.

Далее, разложение можно было бы производить как и в примерах 3 и 4. (Проделайте это самостоятельно и убедитесь, что все коэффициенты b_n обращаются в нуль.)

Мы, однако, воспользуемся готовыми формулами разложения $f(x)$, задаваемой на $[0, l]$, по $\cos \frac{\pi n x}{l}$ (см. Фихтенгольц, II, п° 405).

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 1,$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 \frac{x}{2} \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{\pi n x}{2} dx.$$

Применяем интегрирование по частям. Полагаем

$$u = x; \quad dv = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi n x}{2} dx,$$

тогда

$$du = dx, \quad v = \frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi n} x \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 - \frac{1}{\pi n} \int_0^2 \sin \frac{\pi n x}{2} dx = \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi^2 n^2} \cos \pi n - \frac{2}{\pi^2 n^2} \cos 0 = \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2 n^2} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, получаем при $0 \leq x \leq 2$:

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{4}{9\pi^2} \cos \frac{3\pi x}{2} - \frac{4}{25\pi^2} \cos \frac{5\pi x}{2} - \dots$$

Объясните, почему в ответах к примерам 1 и 5 фигурирует равенство самой функции и вычисленного для нее ряда Фурье, тогда как в ответах к примерам 2, 3, 4 приведены только соответствующие ряды Фурье?

98. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в промежутке $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\pi - x}{2} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi - x}{2} & \text{при } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

99. Найти ряд Фурье для функции, заданной в промежутке $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{4} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Как нужно переопределить $f(x)$, чтобы ее ряд Фурье сходил к ней уже во всех точках рассматриваемого промежутка?

100. Найти ряд Фурье для функции, заданной в промежутке $[-2, 2]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -2 \leq x < 0, \\ 2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Выяснить, в каких точках промежутка $[-2, 2]$ полученный ряд не сходится к $f(x)$. Чему в этих точках равна сумма ряда Фурье?

101. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x) = \cos x$, заданную только в промежутке $[0, \pi]$.

102. Разложить $f(x) = \sin x$, заданную в промежутке $[0, 2\pi]$, в ряд по косинусам (т. е. по $\cos \frac{\pi n x}{l} = \cos \frac{\pi n x}{2\pi} = \cos \frac{n x}{2}$).

§ 7. Дополнительные задачи к главе II

103. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$, $0 \leq x < \infty$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n})$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n x}$, $0 \leq x < \infty$.

104. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно

на $[a, b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ также сходится равномерно на $[a, b]$.

105. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд

Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

сходится равномерно при $x \geq 0$.

106. Определить области сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$.

У к а з а н и е. Воспользоваться признаком Даламбера.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (ряд Ламберта).

107. Найти суммы рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) \cdot 3^{n-1}}$.

У к а з а н и е. Рассмотреть сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)} \quad \text{при } x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$.

108. Доказать, что если ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ сходится при $x = x_1$ и при $x = x_2$ ($|x_1| < |x_2|$), то этот ряд сходится также при $|x_1| < |x| < |x_2|$.

109. Определить интервал сходимости разложения в степенной ряд функции

$$y = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

а) по степеням x ; б) по степеням бинома $(x - 5)$, не производя самого разложения.

Указание. Радиус сходимости степенного ряда равен расстоянию от точки, в окрестности которой производится разложение, до ближайшей особой точки функции.

110. Применяя различные методы, найти разложение в ряд по степеням x следующих функций:

а) $y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}$;

б) $y = \operatorname{arccos} (1 - 2x^2)$.

111. Функцию

$$y = \ln \frac{1}{2 + 2x + x^2}$$

разложить по степеням бинома $(x + 1)$.

112. Производя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложение в ряды по степеням x следующих функций:

а) $y = e^x \cos x$;

б) $y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

113. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1 , а

ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ — радиус сходимости R_2 , то какой радиус сходимости R имеют ряды:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$?

114. Вычислить с точностью до 0,001

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

ГЛАВА I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Общие понятия

Во всем этом разделе мы будем ссылаться на учебники: Н. А. Фролов, Курс математического анализа, часть 2, Учпедгиз, 1959 (в дальнейших ссылках: Фролов, 2); В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1959 (в дальнейших ссылках: Степанов); А. Ф. Бермант, Курс математического анализа, часть II, Физматгиз, 1958 (в дальнейших ссылках: Бермант, II).

Приступая к решению задач настоящего параграфа, предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел III, основные понятия, или Степанов, гл. 1, § 1, п^о 1, 2, 4, или Бермант, II, гл. XI V, п^о 193.

Пример 1. Проверить подстановкой, что функция $y = Cx^2$, где C — произвольная постоянная, является решением дифференциального уравнения

$$xy' - 2y = 0.$$

Построить изображение семейства интегральных кривых и выделить (аналитически и на графике) интегральную кривую, проходящую через точку $(3; 4\frac{1}{2})$.

Решение. Находим производную от функции $y = Cx^2$:

$$y = 2Cx.$$

Затем подставляем в данное уравнение значение y и y' :

$$x \cdot 2Cx - 2Cx^2 \equiv 0.$$

Таким образом, функция $y = Cx^2$ после подстановки ее в дифференциальное уравнение обратила последнее в тождество. Поэтому она является решением данного диф-

ференциального уравнения. Больше того, эта функция является общим решением данного дифференциального уравнения первого порядка, так как она содержит одну произвольную постоянную C и из него может быть получено по начальным условиям частное решение, удовлетворяющее этим условиям.

Уравнение $y = Cx^2$ определяет семейство парабол с вершинами в начале координат и осью симметрии, совпадающей с осью Oy , которое и будет семейством интегральных кривых. Это семейство изображено на рисунке 7.

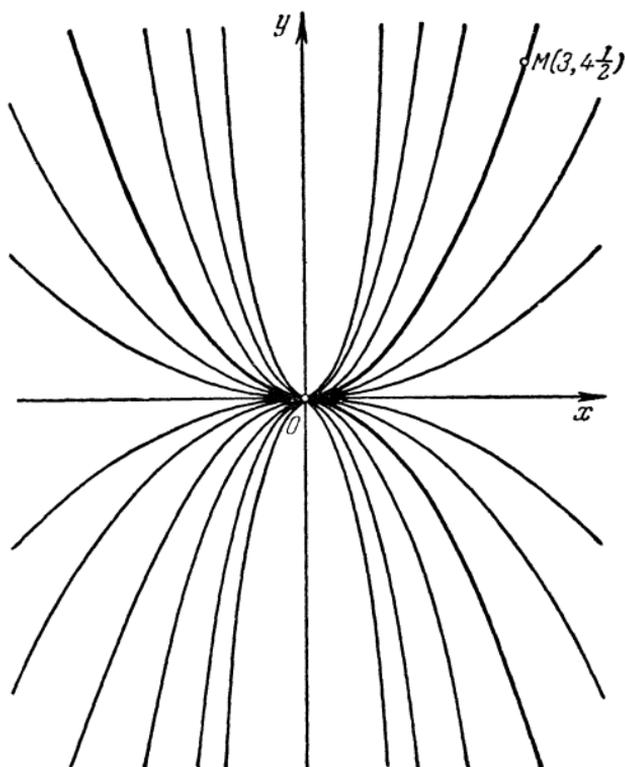


Рис. 7.

Найдем теперь интегральную кривую, проходящую через точку $M \left(3; 4\frac{1}{2} \right)$. Это условие можно записать еще так: найти интегральную кривую (или частное решение), удовлетворяющую начальному условию $y = 4\frac{1}{2}$ при $x = 3$. Подставляем начальные данные в общее решение, будем иметь:

$$4\frac{1}{2} = C \cdot 9.$$

Следовательно, $C = \frac{1}{2}$ и частным решением, удовлетворяющим начальному условию, будет функция

$$y = \frac{1}{2} x^2.$$

График этой функции проходит через точку $(3; 4\frac{1}{2})$.

На чертеже 7 он изображен жирной линией.

Пример 2. Построить изображение семейства окружностей

$$(x - C)^2 + y^2 = 1 \quad (*)$$

и составить его дифференциальное уравнение.

Решение. Все окружности, входящие в данное семейство, имеют радиус, равный единице, а центры их расположены на оси Ox . Они изображены на рисунке 8. Со-

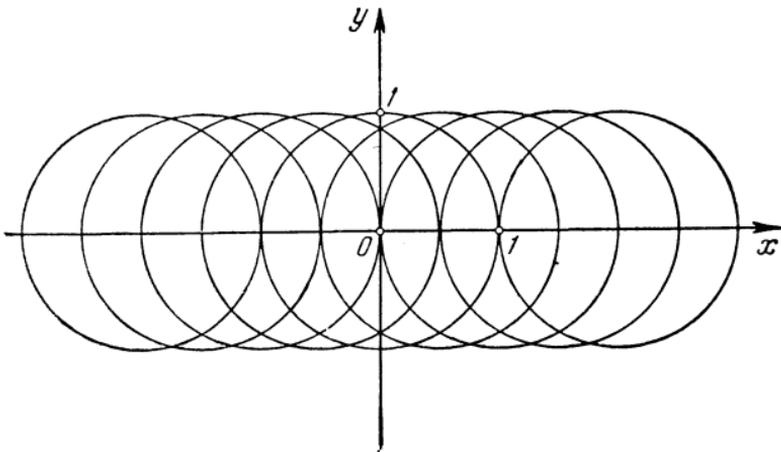


Рис. 8.

ставляем дифференциальное уравнение семейства; для этого находим производную y' по формуле производной от функции, заданной неявно:

$$2(x - C) + 2y y' = 0$$

или

$$y' = -\frac{x - C}{y}. \quad (**)$$

Исключаем теперь произвольную постоянную C из уравнений (*) и (**). Для этого из уравнения (**) находим

$$x - C = -y y'$$

и подставляем в уравнение (*), получаем окончательно:

$$y^2 y'^2 + y^2 = 1.$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение данного семейства окружностей.

115. Проверить подстановкой, что неявная функция $x^2 + y^2 = 2Cx$ является интегралом дифференциального уравнения

$$2xyy' = y^2 - x^2.$$

Построить изображение семейства интегральных кривых и выделить (аналитически и на графике) интегральную кривую, проходящую через точку $(-4; 0)$.

116. Проверить подстановкой, что функция $y = Cx + C^2$ является решением дифференциального уравнения

$$y = xy' + (y')^2.$$

Построить изображение семейства интегральных кривых и выделить (аналитически и на графике) интегральную кривую, проходящую через точку $(1; -\frac{1}{4})$.

117. Построить изображение семейства парабол

$$y = x^2 + 2Cx$$

и составить его дифференциальное уравнение.

118. Построить изображение семейства эллипсов

$$\frac{x^2}{4C} + \frac{y^2}{C} = 1 \quad (C > 0)$$

и составить его дифференциальное уравнение.

§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными

Предварительно изучите по учебнику Фролов, 2, раздел III, гл. 1, § 2, или Степанов, гл. 1, § 2, или Бермант, II, гл. XIV, н° 192.

Пример 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0.$$

Решение. Вынесем за скобки в первом слагаемом x , а во втором y :

$$x(y^2 + 1) dx + y(1 - x^2) dy = 0,$$

откуда

$$y(1 - x^2) dy = -x(y^2 + 1) dx.$$

Разделим левую и правую части равенства на произведение

$$(1 - x^2)(1 + y^2):$$

$$\frac{y}{1 + y^2} dy = -\frac{x}{1 - x^2} dx.$$

Переменные разделены. Теперь интегрируем:

$$\int \frac{y}{1 + y^2} dy = -\int \frac{x}{1 - x^2} dx.$$

Выполняя интегрирование, получим:

$$\frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = \frac{1}{2} \ln(1 - x^2) + \frac{1}{2} \ln C^*.$$

Мы получили общий интеграл ** данного дифференциаль-

* С целью получить более удобную форму записи решения мы в качестве произвольной постоянной интегрирования взяли не C , а $\frac{1}{2} \ln C$, что не нарушает общности рассуждений.

Здесь и всюду дальше при интегрировании выражений вида $\int \frac{du}{u}$ мы будем опускать знак модуля, что вследствие произвольности постоянной интегрирования C не изменит результата интегрирования.

В самом деле,

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + \ln C = \ln C |u| = \begin{cases} \ln C u & \text{при } u > 0, \\ \ln(-C u) & \text{при } u < 0. \end{cases}$$

Теперь, если предположить, что произвольная постоянная интегрирования может принимать как положительные, так и отрицательные значения, т. е. положить $C_1 = \pm C$, то

$$\int \frac{du}{u} = \ln C_1 u.$$

** Чтобы показать, что этот интеграл является общим интегралом данного дифференциального уравнения, нужно убедиться в том, что для каждой пары начальных условий $x = x_0$, $y = y_0$ (удовлетворяющих теореме существования и единственности решения дифференциального уравнения) найдется единственное значение произвольной постоянной C .

ного уравнения. Задача решена. После потенцирования будем иметь:

$$1 + y^2 = C(1 - x^2),$$

откуда

$$C x^2 + y^2 = C - 1,$$

или окончательно

$$\frac{x^2}{1 - \frac{1}{C}} + \frac{y^2}{C - 1} = 1.$$

Итак, общий интеграл данного дифференциального уравнения определяет семейство кривых второго порядка (семейство гипербол и эллипсов, а при $0 \leq C \leq 1$ — мнимых эллипсов).

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2},$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y|_{x=0} = 1.$$

Решение. Найдем сначала общее решение дифференциального уравнения. Помножив левую и правую части уравнения на dx и разделив на $1 + y^2$, получим:

$$\frac{dy}{1 + y^2} = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Переменные разделились. Интегрируя левую и правую части, будем иметь:

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{dx}{1 + x^2}$$

или

$$\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C.$$

Мы получили общий интеграл заданного дифференциального уравнения. Теперь, используя начальные данные, найдем C :

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 0 + C,$$

т. е.

$$C = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}$$

или

$$\operatorname{tg} \operatorname{arctg} y = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \operatorname{arctg} x \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}.$$

Окончательно получаем:

$$y = \frac{x + 1}{1 - x}.$$

Пример 3. Найти уравнение кривой, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью Oy . Известно, что искомая кривая проходит через точку $P(1; 2)$.

Решение. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомой кривой, AM — касательная к кривой, A — точка пересечения касательной с осью Ox , B — точка пересечения ее с осью Oy , C — проекция точки M на ось Ox (рис. 9).

Обозначив через α угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox , будем иметь:

$$\operatorname{tg} \alpha = y. \quad (*)$$

С другой стороны, из чертежа следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CM}{AC}.$$

Выразим последнее отношение через текущие координаты точки M . Так как $MC \parallel BO$, то $\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{BM}$, но $OC = x$, $AB = BM$, поэтому $AO = x$ и $AC = AO + OC = 2x$. Кро-

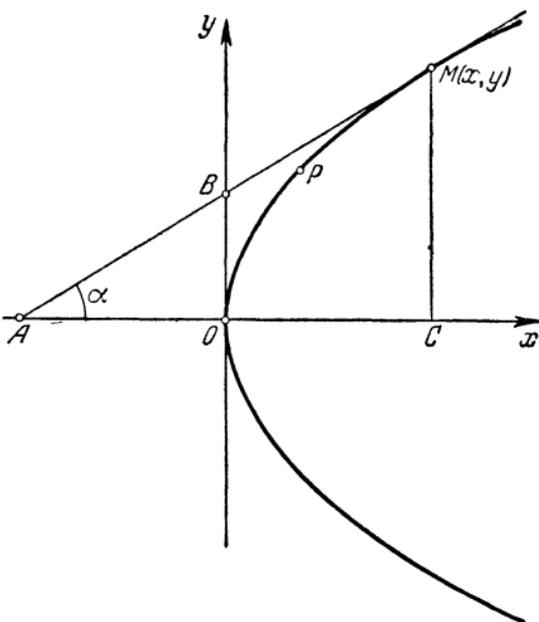


Рис. 9.

ме того, $CM = y$. Таким образом, из геометрических соображений получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{2x}. \quad (**)$$

Сравнивая выражения (*) и (**) для $\operatorname{tg} \alpha$, получим дифференциальное уравнение:

$$y' = \frac{y}{2x}.$$

Это — дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}.$$

Откуда, интегрируя, получаем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2x},$$
$$\ln y = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln C$$

или

$$2 \ln y = \ln Cx, \quad y^2 = Cx.$$

Таким образом, общее решение полученного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y^2 = Cx.$$

Геометрически оно определяет семейство парабол, проходящих через начало координат; их ось симметрии совпадает с осью Ox .

Из полученного семейства интегральных кривых выделим теперь искомую кривую, удовлетворяющую начальному условию, т. е. проходящую через точку $P(1; 2)$.

Подставляя значения $x = 1$, $y = 2$ в общее решение $y^2 = Cx$, получим $C = 4$. Таким образом, уравнение искомой кривой имеет вид:

$$y^2 = 4x.$$

Пример 4. Во сколько времени тело, нагретое до 100° , охладится до 25° в комнате с температурой 20° , если до 60° оно охладилось за 20 минут. (По закону Ньютона скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и воздуха.)

Решение. Пусть в момент времени t после начала охлаждения тела его температура будет T , тогда, с одной стороны, скорость изменения температуры тела равна $\frac{dT}{dt}$. С другой стороны, по закону Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и воздуха в комнате, т. е. она равна

$$k(T - 20),$$

здесь k — коэффициент пропорциональности, зависящий от массы, теплопроводности, формы тела и т. п.

Сравнивая оба выражения для скорости изменения температуры, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20) *.$$

Это — дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{dT}{T - 20} = -k dt.$$

Интегрируем левую и правую части:

$$\int \frac{dT}{T - 20} = - \int k dt,$$

откуда

$$\ln(T - 20) = -kt + \ln C. \quad (*)$$

Мы получили общее решение дифференциального уравнения; в него, кроме произвольной постоянной C , входит еще и коэффициент k ; и то и другое можно определить из начальных условий.

Подставляя в равенство (*) $t = 0$ мин, $T = 100^\circ$, получим:

$$\ln 80 = \ln C, \text{ т. е. } C = 80.$$

Затем при $t = 20$ мин по условию $T = 60^\circ$, следовательно,

$$\ln 40 = -k \cdot 20 + \ln 80,$$

или

$$k \cdot 20 = \ln 80 - \ln 40, \quad 20k = \ln 2,$$

*Здесь мы перед коэффициентом k поставили знак минус, так как температура тела уменьшается. Впрочем, этого можно было не делать, если предположить, что k может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

откуда

$$k = \frac{\ln 2}{20}.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее всем условиям данной задачи, будет:

$$\ln(T - 20) = -\frac{t \ln 2}{20} + \ln 80,$$

или

$$\ln(T - 20) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} + \ln 80.$$

Окончательно получаем:

$$T - 20 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Теперь выясним, через сколько времени температура тела станет равной 25° . Подставляя вместо T число 25, находим t , для этого удобнее воспользоваться решением, записанным в виде (**):

$$\ln 5 = -\frac{t}{20} \ln 2 + \ln 80, \quad \frac{t}{20} \ln 2 = \ln 80 - \ln 5,$$

$$\frac{t}{20} \ln 2 = \ln 16, \quad \frac{t}{20} \ln 2 = 4 \ln 2, \quad t = 80.$$

Следовательно, тело остынет до температуры 25° через 80 мин.

Пример 5 Цилиндрический резервуар с горизонтальной осью имеет длину 6 м и диаметр 4 м (рис. 10). Во сколько времени вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через круглое отверстие радиуса $\frac{1}{12}$ м, сделанно-

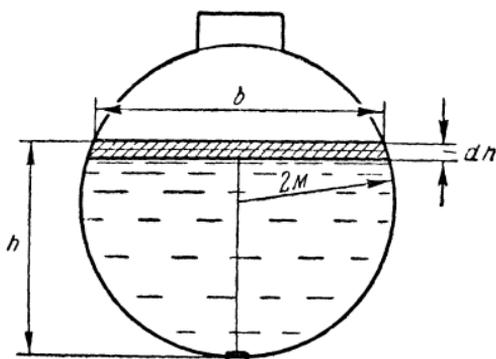


Рис. 10.

го в дне резервуара? Скорость истечения жидкости из

отверстия в сосуде вычисляется по формуле $v = c\sqrt{2gh}$, где h — высота столба воды от уровня свободной поверхности до отверстия, c — коэффициент, зависящий от вязкости жидкости, формы сосуда и пр. Для воды в обычных условиях приближенно можно принять $c = 0,6$ *.

Решение. Пусть в момент t после начала вытекания воды из резервуара высота столба ее будет равна h . Тогда масса воды, вытекающая из сосуда в промежуток времени dt , образует цилиндр, высота которого есть $v dt$, а основание — круг радиуса $\frac{1}{12}$ м. Объем этой массы будет равен

$$\pi \left(\frac{1}{12}\right)^2 v dt = \pi \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot 0,6 \sqrt{2gh} \cdot dt. \quad (*)$$

Вследствие этого истечения в резервуаре освобождается от воды слой, приближенно имеющий форму параллелепипеда, высота которого dh , основание — прямоугольник, образованный свободной поверхностью воды. Найдем его размеры. Длина его равна 6 м, ширина

$$b = 2\sqrt{4 - (h - 2)^2} = 2\sqrt{4h - h^2}$$

(заметим, что эта формула для вычисления h справедлива как для случая, когда $h \geq 2$, изображенного на рисунке 10, так и для $h < 2$). Таким образом, объем параллелепипеда, освобождающегося от воды, будет:

$$-6 \cdot 2\sqrt{4h - h^2} dh. \quad (**)$$

Здесь перед формулой объема параллелепипеда мы взяли знак минус, так как dh может принимать только отрицательные значения (высота столба воды уменьшается), а объем не может выражаться отрицательным числом, и, чтобы произведение всех чисел стало положительным, нужно перед ним поставить знак минус.

Сравнивая выражения (*) и (**), получим дифференциальное уравнение:

$$\pi \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot 0,6 \sqrt{2gh} dt = -6 \cdot 2\sqrt{4h - h^2} dh.$$

* Обращаем внимание читателя на то, что скорость свободно падения тела, без учета сопротивления среды, равна $\sqrt{2gh}$, где h — путь, пройденный падающим телом.

Разделив левую и правую части на $\pi \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot 0,6 \sqrt{gh}$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$dt = - \frac{12^3}{\pi \cdot 0,6 \sqrt{2g}} \sqrt{4-h} dh.$$

Интегрируя, будем иметь:

$$\int dt = - \frac{12^3}{\pi \cdot 0,6 \sqrt{2g}} \int \sqrt{4-h} dh,$$

или

$$t = \frac{12^3 \cdot 2 \sqrt{(4-h)^3}}{\pi \cdot 0,6 \sqrt{2g} \cdot 3} + C.$$

Это и будет общий интеграл, удовлетворяющий условию задачи. Для отыскания C воспользуемся начальными условиями: при $t = 0$ высота столба воды равна $h = 4$ м. Подставляя эти значения для t и h в общий интеграл, получим $C = 0$.

Таким образом, время истечения и высота столба воды в резервуаре связаны соотношением:

$$t = \frac{12^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{(4-h)^3}}{\pi \cdot 0,6 \cdot \sqrt{2g} \cdot 3}.$$

По этой формуле найдем, через сколько времени вытечет вся вода. Подставив в эту формулу $h = 0$, получим:

$$t = \frac{12^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{4^3}}{\pi \cdot 0,6 \sqrt{2g} \cdot 3} = \frac{12^3 \cdot 2 \cdot 8}{\pi \cdot 0,6 \cdot \sqrt{2g} \cdot 3} \approx 1104.$$

Так как в задаче размеры были выражены в метрах, то для g нужно взять соответствующую размерность, а именно: $g = 9,81$ м/сек². Тогда ответ для t получится в секундах.

Следовательно, $t = 1104$ сек = 18,4 мин.

Пример 6. Найти кривую, проходящую через точку $M_0(3; 3)$ и обладающую следующим свойством: если через любую точку кривой провести две прямые, соответственно параллельные координатным осям, до пересечения с последними, то полученный при этом прямоугольник делится кривой на две части, из которых одна (примыкающая к оси Ox) по площади вдвое больше другой (рис. 11).

Решение. Через произвольную точку $M(x; y)$ кривой проводим две прямые $MA \parallel Oy$ и $MB \parallel Ox$. Согласно условию задачи

$$\text{пл. } ОСМА = 2 \text{ пл. } СВМ.$$

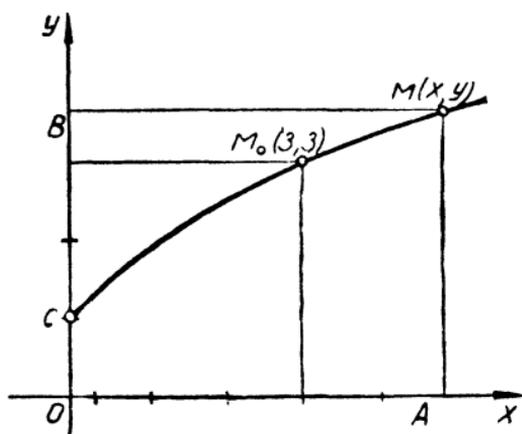


Рис. 11.

Так как

$$\text{пл. } ОСМА = \int_0^x y dx,$$

а

$$\text{пл. } СВМ = \text{пл. } ОБМА - \text{пл. } ОСМА,$$

то получим уравнение:

$$\int_0^x y dx = 2 \left(xy - \int_0^x y dx \right),$$

или

$$3 \int_0^x y dx = 2xy.$$

Продифференцируем обе части полученного равенства по x ; будем иметь:

$$3y = 2y + 2xy',$$

или

$$2xy' = y.$$

Это — дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. После разделения переменных получим:

$$2 \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

откуда

$$2 \ln y = \ln x + \ln C$$

или

$$y^2 = Cx.$$

Таким образом, указанным свойством обладают параболы с вершинами в начале координат и с осями симметрии, совпадающими с осью Ox .

Используя начальные условия, $y = 3$ при $x = 3$, находим:

$$9 = C \cdot 3, \text{ или } C = 3,$$

и искомой кривой будет парабола

$$y^2 = 3x.$$

Замечание о составлении дифференциальных уравнений. Решение задач геометрического и особенно физического характера, требующих составления дифференциальных уравнений, нередко вызывает затруднения. Это объясняется тем, что специфика конкретных физических задач требует знания разнообразных законов физики, и тем, что нельзя дать универсального метода составления дифференциальных уравнений, пригодного во всех случаях. Однако можно дать некоторые общие указания практического характера.

При составлении дифференциальных уравнений первого порядка из условий геометрической или физической задачи часто приходят к одному из следующих трех видов уравнений:

- 1) дифференциальные уравнения в дифференциалах;
- 2) дифференциальные уравнения в производных;
- 3) простейшие интегральные уравнения с последующим преобразованием их в дифференциальные уравнения.

Рассмотрим, как составляются уравнения каждого из приведенных видов.

1. Уравнения в дифференциалах. Этот, так называемый *дифференциальный метод* заключается в том, что из условий задачи составляется приближенным путем соотношение между дифференциалами. При этом делаются допущения, упрощающие задачу и вместе с тем не отражающиеся на результатах. Например, бесконечно малые приращения величин заменяются их дифференциалами, неравномерно протекающие в течение ма-

лого промежутка времени Δt физические процессы (неравномерное движение точки, нагревание или охлаждение тела, истечение жидкости из сосуда и т. д.) рассматриваются как равномерные, протекающие с постоянной скоростью. Эти допущения не отражаются на правильности результатов вследствие того, что замена приращений дифференциалами сводится к отбрасыванию бесконечно малых высших порядков. Так как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента является пределом отношения их приращений, то, по мере того как приращения стремятся к нулю, наши допущения выполняются все с большей точностью. Получающиеся при этом дифференциальные уравнения оказываются поэтому совершенно точными (см. пример 5 этого параграфа).

2. Уравнения в производных. Во многих случаях можно составить дифференциальные уравнения, в которых вместо дифференциалов, содержатся производные, рассматриваемые как скорости изменения величин. При этом, в частности, используется геометрический смысл производной (угловой коэффициент касательной) физический смысл производной (скорость протекания неравномерного процесса). Этот метод является видоизменением дифференциального метода, отсутствие в нем бесконечно малых только кажущееся; при этом методе используется готовое понятие скорости изменения величины, которое само появилось из рассмотрения бесконечно малых элементов (см. примеры 3 и 4).

3. Простейшие интегральные уравнения. Решение некоторых задач приводит к уравнениям, содержащим искомые функции под знаком интеграла. Такие уравнения называются интегральными. Они, в частности, возникают, когда используется геометрический смысл определенного интеграла как площади криволинейной трапеции или применяются другие интегральные формулы (длина дуги, площадь поверхности вращения, объем тела, работа силы и т. д.). В простейших случаях путем дифференцирования удастся преобразовать интегральные уравнения в дифференциальные (см. пример 6).

В задачах 119—122 найти общие решения данных дифференциальных уравнений.

$$119. (1 + y^2) dx + xy dy = 0.$$

$$120. xy y' = 1 - x^2.$$

$$121. \quad xy' + y = y^2.$$

$$122. \quad 2\sqrt{y} \, dx = dy.$$

В задачах 123 — 124 найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

$$123. \quad y' \sin x = y \ln y, \text{ если } y \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

124. $(1 + e^x)yy' = e^x$; выделить интегральную кривую, проходящую через точку $M(1; 1)$.

125. Найти кривую, проходящую через точку $(2; 4)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

126. Закон распада радия состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия. Известно, что половина его первоначального запаса распадается по истечении 1600 лет. Определить количество нераспавшегося радия по истечении 100 лет, если первоначальное его количество равно m_0 .

127. В резервуаре находится 100 л рассола, содержащего 10 кг растворенной соли. Вода вливается в резервуар со скоростью 3 л в 1 мин, и смесь вытекает из него с такой же скоростью, причем концентрация поддерживается равномерной (например, посредством перемешивания). Сколько соли останется в резервуаре по истечении 1 часа?

128. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения.

Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 100 об/мин, по истечении 1 мин вращался со скоростью 60 об/мин.

129. В какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметром 2 м, вытечет из нее через круглое отверстие радиусом 0,1 м, вырезанное на дне чаши? (См. пример 5.)

§ 3. Однородные уравнения

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел III, гл. I, § 3 и 4, или Степанов, гл. 1, § 3, п° п° 1, 2, или Бермант, II, гл. XIV, п° 194, I и III.

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение:

$$(y^2 - 3x^2)dx - 2xy dy = 0$$

Решение. Данное уравнение есть однородное дифференциальное уравнение, так как выражения, стоящие множителями при dx и dy , являются однородными функциями одного и того же измерения, а именно второго измерения*. Для интегрирования однородного уравнения удобнее разрешить его относительно производной y' :

$$y' = \frac{y^2 - 3x^2}{2xy}. \quad (*)$$

Производим замену неизвестной функции y функцией u по формуле:

$$u = \frac{y}{x}, \text{ или } y = ux,$$

где u — функция от x , тогда

$$y' = u'x + u.$$

Подставляя в (*) вместо y и y' их выражения через функцию u , будем иметь:

$$u'x + u = \frac{u^2x^2 - 3x^2}{2x^2u}.$$

Сокращаем дробь на x^2 и переносим вправо u :

$$u'x = \frac{u^2 - 3}{2u} - u = \frac{u^2 - 3 - 2u^2}{2u},$$

или

$$u'x = -\frac{u^2 + 3}{2u}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{2u du}{u^2 + 3} = -\frac{dx}{x}.$$

*Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией* измерения n , если при любом t

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Например, $\sqrt{x^2 + y^2}$ есть однородная функция первого измерения, так как

$$\sqrt{x^2 t^2 + y^2 t^2} = t \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Легко убедиться, что многочлен, все члены которого имеют одно и то же измерение k , есть однородная функция измерения k .

Производим интегрирование левой и правой части полученного равенства:

$$\int \frac{2u}{u^2 + 3} du = - \int \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\ln(u^2 + 3) = -\ln x + \ln C,$$

или

$$u^2 + 3 = \frac{C}{x}.$$

Заменяя теперь переменную u через $\frac{y}{x}$, получим:

$$\frac{y^2}{x^2} + 3 = \frac{C}{x}.$$

Окончательно найдем:

$$y^2 + 3x^2 = Cx.$$

Это и есть общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Пример 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0.$$

Решение. Разрешим это уравнение относительно y' :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - 2y + 5}{2x - y + 4}. \quad (*)$$

Уравнение (*) — уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right).$$

Находим $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$; в нашем примере $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3 \neq 0$. Поэтому подстановкой

$$x = u + h, \quad y = v + k,$$

где u и v — новые переменные, а h и k — постоянные, заданное уравнение сводится к однородному. Имеем:

$$x = u + h, \quad y = v + k, \quad dx = du, \quad dy = dv,$$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u + h - 2(v + k) + 5}{2(u + h) - (v + k) + 4},$$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u - 2v + h - 2k + 5}{2u - v + 2h - k + 4}.$$

Теперь подберем h и k так, чтобы выражения $h - 2k + 5$ и $2h - k + 4$ обратились в нуль. Для этого решаем систему алгебраических линейных уравнений

$$\begin{aligned} h - 2k + 5 &= 0, \\ 2h - k + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Получаем $h = -1$, $k = 2$.

Таким образом, подстановкой

$$x = u - 1 \text{ и } y = v + 2$$

мы приводим заданное уравнение к виду:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u - 2v}{2u - v}. \quad (**)$$

Мы получили однородное уравнение, которое и решаем методом, рассмотренным в примере 1, т. е. полагаем

$$z = \frac{v}{u}, \text{ или } v = uz, \quad \frac{dv}{du} = u \frac{dz}{du} + z.$$

Подставляем в (**), вместо v и $\frac{dv}{du}$ их значения:

$$\begin{aligned} u \frac{dz}{du} + z &= -\frac{u - 2uz}{2u - uz}, \\ u \frac{dz}{du} &= -\frac{1 - 2z}{2 - z} - z = -\frac{1 - 2z + 2z - z^2}{2 - z}, \\ u \frac{dz}{du} &= -\frac{1 - z^2}{2 - z}. \end{aligned}$$

Разделяем переменные:

$$\frac{(2 - z) dz}{z^2 - 1} = \frac{du}{u}.$$

Выполняем интегрирование:

$$\begin{aligned} \int \frac{(2 - z) dz}{z^2 - 1} &= \int \frac{2 dz}{z^2 - 1} - \int \frac{z dz}{z^2 - 1} = \\ &= \ln \frac{z - 1}{z + 1} - \frac{1}{2} \ln (z^2 - 1) = \frac{1}{2} \ln \frac{(z - 1)^2}{(z + 1)^2 (z^2 - 1)} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{z - 1}{(z + 1)^3}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} \ln \frac{z-1}{(z+1)^3} = \ln u + \frac{1}{2} \ln C, \quad \frac{z-1}{(z+1)^3} = Cu^2.$$

Возвращаемся к прежним переменным: так как $z = \frac{v}{u}$, то

$$\frac{\frac{v}{u} - 1}{\left(\frac{v}{u} + 1\right)^3} = Cu^2 \quad \text{или} \quad \frac{v-u}{(v+u)^3} = C$$

и далее $u = x + 1$, $v = y - 2$, следовательно,

$$\frac{y-2-x-1}{(y-2+x+1)^3} = C.$$

Мы получили:

$$\frac{y-x-3}{(y+x-1)^3} = C$$

— общий интеграл заданного дифференциального уравнения.

Пример 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x-4y-2}{3x-4y-3}. \quad (*)$$

Решение. Это уравнение, как и в предыдущем примере, вида:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),$$

однако определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$, поэтому подстановкой $3x - 4y = z$ уравнение (*) сводится к уравнению с разделяющимися переменными; находим:

$$3 - 4 \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{dz}{dx},$$

и уравнение (*) примет вид:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{dz}{dx} = \frac{z-2}{z-3}$$

или

$$\frac{dz}{dx} = 3 - \frac{4z - 8}{z - 3},$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{3z - 9 - 4z + 8}{z - 3},$$
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z + 1}{z - 3}.$$

Разделяем переменные:

$$\left(\frac{3-z}{z+1}\right) dz = dx \text{ или } \left(\frac{4}{z+1} - 1\right) dz = dx,$$

откуда

$$4 \ln(z+1) - z = x + 4C.$$

Возвращаясь к прежней переменной y , получим:

$$4 \ln(3x - 4y + 1) - 3x + 4y = x + 4C,$$

или окончательно получим общий интеграл:

$$\ln(3x - 4y + 1) = x - y + C.$$

Пример 4. По какой поверхности вращения следует отшлифовать зеркало прожектора, чтобы все лучи, выходящие из источника света, помещенного в точке O на оси вращения, отражались бы зеркалом параллельно этой оси (рис. 12).

Решение. Возьмем меридианное сечение поверхности вращения. Выберем начало координат в точке O , ось Ox направим по оси вращения. Обозначим угол, образованный осью Ox и касательной AT в произвольной точке сечения $M(x; y)$, через α . Тогда по условию задачи $\angle SMT = \alpha$. Но $\angle OMN = \angle SMN$ (угол падения равен углу отражения), поэтому $\angle OMA = \angle SMT = \alpha$. Таким образом, треугольник OAM — равнобедренный и

$$AO = OM.$$

Отрезок $AO = AP - OP = y \operatorname{ctg} \alpha - x$, но $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{y'}$, поэтому $AO = \frac{y}{y'} - x$, $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, и мы получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

или в дифференциалах:

$$y dx - (x + \sqrt{x^2 + y^2}) dy = 0.$$

Это — однородное уравнение. Подстановкой $x = yu$ и соответственно $dx = u dy + y du$ приводим его к уравнению с разделяющимися переменными*:

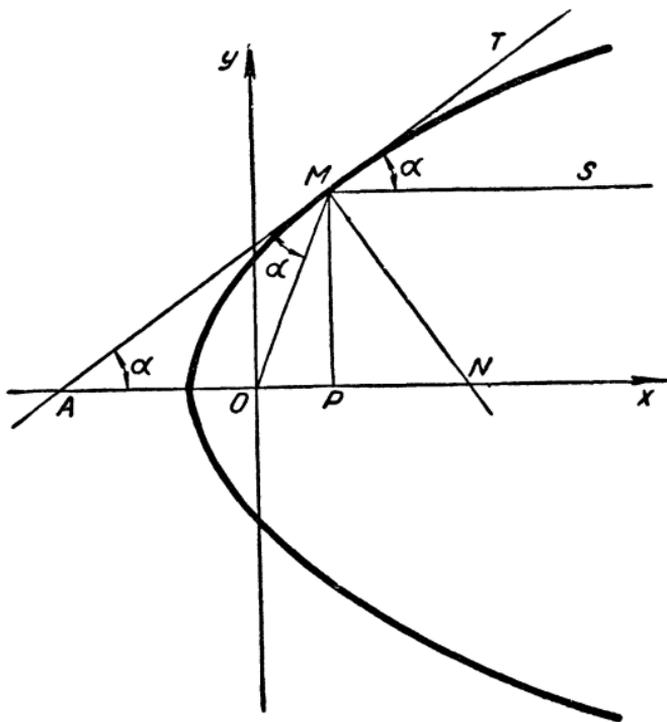


Рис. 12.

$$y(u dy + y du) = (uy + (\sqrt{u^2 y^2 + y^2}) dy,$$

$$y(u dy + y du) = y(u + \sqrt{u^2 + 1}) dy,$$

или

$$y du = \sqrt{u^2 + 1} dy.$$

откуда

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{dy}{y}$$

* Для упрощения дальнейших выкладок здесь за искомую функцию взята переменная x , а за аргумент y . (В этой задаче переменные x и y по существу равноправны.)

и

$$\ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = \ln y - \ln C,$$

или

$$u + \sqrt{u^2 + 1} = \frac{y}{C}.$$

Упростим полученное уравнение меридианного сечения, уничтожив иррациональность:

$$\left(\frac{y}{C} - u\right)^2 = u^2 + 1.$$

$$\frac{y^2}{C^2} - \frac{2yu}{C} = 1.$$

Заменяем переменную u через ее значение $\frac{x}{y}$:

$$y^2 - 2Cy \frac{x}{y} = C^2,$$

или окончательно:

$$y^2 = 2C \left(x + \frac{C}{2}\right).$$

Мы получили семейство парабол с осью симметрии, совпадающей с осью Ox , с параметром $p = C$ и вершиной, лежащей на расстоянии $\frac{C}{2}$ влево от начала координат.

Следовательно, искомая поверхность вращения — параболоид вращения.

В задачах 130 — 135 проинтегрировать заданные дифференциальные уравнения.

130. $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0.$

Найти интегральную кривую, проходящую через точку $M(1; 1).$

131. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}.$

132. $y' = \frac{x'}{y} + \frac{y}{x}$; найти интегральную кривую, удо-

влетворяющую начальным условиям $y|_{x=1} = 1.$

133. $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0.$

134. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$

135. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$

136. Найти кривую, которая пересекает все прямые, проходящие через одну и ту же точку O под одним и тем же углом ω (рис. 13).

§ 4. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел III, гл. 1, § 5, 6, или Степанов, гл. 1, § 4 (примечания I и III можно опустить), или Бермант, II, гл. XIV, п^о 194, II и III.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения.

$$y' + y \cos x = \sin x \cos x,$$

удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=0} = 0$.

Решение. Это — линейное дифференциальное уравнение первого порядка так как искомая функция y и ее производная y' содержатся в этом уравнении слагаемыми в первой степени. Линейное уравнение можно интегрировать либо способом вариации произвольной постоянной, либо способом подстановки. Рассмотрим каждый из них.

Способ вариации произвольной постоянной. Найдем сначала общее решение линейного однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному*:

$$y' + y \cos x = 0.$$

* Линейное уравнение вида $y' + p(x)y = f(x)$ называется неоднородным, а уравнение $y' + p(x)y = 0$ называется линейным однородным уравнением, соответствующим данному неоднородному уравнению. Не следует смешивать однородные дифференциальные уравнения, которые были рассмотрены в § 3, с линейными однородными уравнениями.

В этом уравнении переменные разделяются:

$$\frac{dy}{dx} = -y \cos x,$$

$$\frac{dy}{y} = -\cos x dx.$$

Интегрируя, получим:

$$\ln y = -\sin x + \ln C$$

или

$$y = Ce^{-\sin x}. \quad (*)$$

Мы нашли общее решение соответствующего линейного однородного уравнения.

Общее решение заданного неоднородного уравнения будем искать в том же виде (*), только произвольную постоянную C будем считать уже функцией от x (применим вариацию постоянной) т. е. будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = C(x)e^{-\sin x}.$$

Дифференцируя левую и правую части, получим:

$$y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x} \cos x.$$

Подставив полученные значения y и y' в заданное уравнение

$$y' + y \cos x = \sin x \cos x,$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x} \cos x + C(x)e^{-\sin x} \cos x &= \\ &= \sin x \cos x. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$C'(x)e^{-\sin x} = \sin x \cos x,$$

$$C'(x) = e^{\sin x} \sin x \cos x.$$

Выполняем интегрирование:

$$C(x) = \int e^{\sin x} \sin x \cos x dx.$$

Интеграл в правой части берем по частям, для этого полагаем:

$$u = \sin x, \quad dv = e^{\sin x} \cos x dx,$$

тогда

$$du = \cos x dx, \quad v = e^{\sin x}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int e^{\sin x} \sin x \cos x dx &= \sin x e^{\sin x} - \int e^{\sin x} \cos x dx = \\ &= \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + C_1. \end{aligned}$$

Таким образом, если

$$C(x) = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C_1,$$

то функция

$$y = C(x) e^{-\sin x}$$

является общим решением данного неоднородного линейного дифференциального уравнения. Значит, общим решением данного уравнения будет:

$$\begin{aligned} y &= [e^{\sin x}(\sin x - 1) + C_1] e^{-\sin x} = \\ &= \sin x - 1 + C_1 e^{-\sin x}. \end{aligned}$$

Найдем теперь искомое частное решение. Подставляя в полученное общее решение начальные условия $y=0$, при $x=0$, будем иметь:

$$0 = \sin 0 - 1 + C_1 e^{-\sin 0},$$

или

$$C_1 = 1.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид:

$$y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}.$$

Способ подстановки. Будем искать общее решение данного линейного уравнения в виде произведения двух функций, т. е. положим

$$y = uv.$$

Произведем дифференцирование:

$$y' = u'v + v'u.$$

Подставляя эти значения y и y' в данное дифференциальное уравнение

$$y' + y \cos x = \sin x \cos x,$$

будем иметь:

$$u'v + v'u + uv \cos x = \sin x \cos x,$$

или, вынося за скобки u ,

$$u'v + u(v' + v \cos x) = \sin x \cos x. \quad (**)$$

Так как решение уравнения мы ищем в виде произведения двух функций, то одну из них мы можем выбрать по своему усмотрению, поэтому потребуем, чтобы функция v обращала в нуль выражение, стоящее в скобках равенства (**), т. е. найдем какое-нибудь частное решение уравнения

$$v' + v \cos x = 0.$$

Разделяя переменные, получим:

$$v' = -v \cos x$$

или

$$\frac{dv}{v} = -\cos x dx.$$

Интегрируя, найдем; $\ln v = -\sin x$ или*

$$v = e^{-\sin x}.$$

Подставляя в (**) полученное значение для v , будем иметь:

$$u'e^{-\sin x} = \sin x \cos x.$$

Разделяем переменные:

$$du = e^{\sin x} \sin x \cos x dx.$$

Выполняем интегрирование (см. стр. 109):

$$u = e^{\sin x} (\sin x - 1) + C.$$

Таким образом, общим решением данного дифференциального уравнения будет:

$$y = uv = [e^{\sin x} (\sin x - 1) + C] e^{-\sin x},$$

$$y = (\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}.$$

Учитывая начальные условия, получим частное решение:

$$y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}.$$

* Здесь мы не выписываем произвольной постоянной, так как нам нужно в качестве v иметь какую-нибудь функцию (наиболее простую), обращающую в нуль выражение, стоящее в скобках (**).

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения:

$$(y^2 - 6x)y' + 2y = 0.$$

Решение. Это уравнение не будет линейным, если считать искомой функцией y (коэффициентом у производной стоит y^2), но оно оказывается линейным, если считать искомой функцией x , а аргументом y . В самом деле, уравнение

$$(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$$

эквивалентно уравнению

$$(y^2 - 6x)\frac{1}{x'} + 2y = 0,$$

или

$$2yx' - 6x = -y^2. \quad (*)$$

Для решения уравнения (*) воспользуемся подстановкой:

$$x = uv, \quad x' = u'v + v'u,$$

тогда будем иметь:

$$2yu'v + 2yv'u - 6uv = -y^2,$$

или

$$2yu'v + u(2yv' - 6v) = -y^2. \quad (**)$$

Теперь потребуем, чтобы в уравнении (**) выражение в скобках обратилось в нуль, т. е. чтобы

$$2yv' - 6v = 0,$$

откуда

$$2y \frac{dv}{dy} = 6v, \quad \frac{dv}{v} = 3 \frac{dy}{y},$$

или

$$\ln v = 3 \ln y \text{ и } v = y^3.$$

Подставляем найденное значение v в (**):

$$2y^4 u' = -y^2,$$

$$du = -\frac{dy}{2y^2}, \quad u = \frac{1}{2y} + C.$$

Но $x = uv$, поэтому

$$x = \left(\frac{1}{2y} + C\right)y^3, \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{2}y^2 + Cy^3.$$

Мы получили общий интеграл заданного дифференциального уравнения.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение:

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Решение. Это — уравнение типа Бернулли (левая часть у него такая же, как и у линейного уравнения, а в правой части стоит выражение $y^m f(x)$, где m — постоянное число, в нашем примере $y^2 \ln x$).

Для интегрирования этого уравнения воспользуемся подстановкой*.

$$y = uv, \quad y' = u'v + v'u.$$

Подставляем эти значения y и y' в заданное уравнение:

$$x u'v + x v'u + uv = u^2 v^2 \ln x$$

или

$$x u'v + u(xv' + v) = u^2 v^2 \ln x. \quad (*)$$

Потребуем, чтобы

$$xv' + v = 0,$$

тогда

$$\frac{x dv}{dx} = -v, \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln v = -\ln x, \quad v = \frac{1^*}{x}.$$

Подставляем найденное значение v в уравнение (*):

$$u' = u^2 \cdot \frac{\ln x}{x^2},$$

или

$$\frac{du}{u^2} = \frac{\ln x dx}{x^2}.$$

Выполняем интегрирование:

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u},$$

* При решении этого уравнения можно было воспользоваться подстановкой $z = y^{1-m}$, которая приводит данное уравнение к линейному. В нашем примере достаточно положить $z = \frac{1}{y}$,

$z' = -\frac{y'}{y^2}$ и заданное уравнение становится линейным:

$$xz' - z = \ln x.$$

и, интегрируя по частям правую часть, находим:

$$\int \frac{\ln x \, dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C.$$

Таким образом, $\frac{1}{u} = \frac{1}{x} (\ln x + 1 + Cx)$, или

$$u = \frac{x}{\ln x + 1 + Cx}.$$

Так как $y = uv$, то окончательно будем иметь:

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}, \text{ или } y(\ln x + 1 + Cx) = 1.$$

Это и есть общий интеграл заданного уравнения Бернулли.

В задачах 137 — 143 проинтегрировать заданные дифференциальные уравнения.

137. $xy' - 3y = x^2$.

138. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

139. $y' + x^2y = x^2$; найти интегральную кривую проходящую через точку (2; 1).

140. $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$.

141. $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

142. $dy + (xy - xy^3)dx = 0$.

143. В физике устанавливается следующая связь между силой тока I и электродвижущей силой E в цепи, имеющей сопротивление R и самоиндукцию L (R и L постоянные):

$$E = RI + L \frac{dI}{dt}.$$

Проинтегрировать это уравнение в предположении, что $E = \text{const}$ и при начальном условии $I = 0$ при $t = 0$ (включение в цепь, в которой не было тока, постоянной электродвижущей силы).

§ 5. Уравнения в полных дифференциалах

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел III, гл. 1, или Степанов, гл. II, § 3, п° 1, или Бермант, II, гл. XIV, п° 195, I.

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение:

$$(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0.$$

Решение. Это — дифференциальное уравнение в полных дифференциалах. В самом деле, обозначая $3x^2 + 6xy^2$ через $P(x, y)$, а $(6x^2y + 4y^3)$ через $Q(x, y)$, мы легко убеждаемся в том, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy,$$

а это и есть необходимое и достаточное условие того, что выражение

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Следовательно, чтобы проинтегрировать данное дифференциальное уравнение, нужно найти такую функцию, для которой левая часть дифференциального уравнения будет полным дифференциалом. Пусть такой функцией будет $u(x, y)$, тогда

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2.$$

Интегрируя левую и правую части по x , получим:

$$u(x, y) = \int (3x^2 + 6xy^2) dx = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Здесь мы произвели интегрирование, считая y постоянной, а в качестве произвольной постоянной интегрирования взяли функцию от y , так как при дифференцировании по x мы считали y постоянной и производная по x от выражения, в которое не входит x , равна нулю.

Таким образом, мы нашли функцию $u(x, y)$ с точностью до слагаемого, содержащего только y , а именно:

$$u(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y). \quad (*)$$

Чтобы найти $\varphi(y)$, используем тот факт, что данное дифференциальное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах, и, следовательно,

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3.$$

Находим $\frac{\partial u}{\partial y}$, используя (*), получим:

$$\frac{du}{dy} = 6x^2y + \varphi'(y).$$

Сравнивая эти два выражения для $\frac{\partial u}{\partial y}$, будем иметь:

$$6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3.$$

Откуда

$$\varphi'(y) = 4y^3$$

и

$$\varphi(y) = \int 4y^3 dy = y^4.$$

Подставляя найденное значение $\varphi(y)$ в (*), окончательно получим функцию $u(x, y)$:

$$u(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4,$$

которая определена с точностью до произвольной постоянной (мы произвольную слагаемую интегрирования положили равной нулю).

Общим интегралом данного дифференциального уравнения будет:

$$u(x, y) = C,$$

в нашей задаче

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

В задачах 144—146 проинтегрировать заданные дифференциальные уравнения.

144. $(x^3 - 3xy^2) dx + (y^3 - 3x^2y) dy = 0,$

145. $x dx + y dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0.$

146. $\frac{2x dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0;$ найти интегральную кривую, проходящую через точку $M(1;1)$.

§ 6. Поле направлений. Графическое интегрирование уравнений

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел III, гл. II, § 1—3, или Степанов, гл. I, § 1, п° 3, гл. II, § 1, или Бермант, гл. XIV, п° 196, вводная часть, I и II.

Пример 1. Построить поле направлений для уравнения

$$y dy - x dx = 0$$

(построить изоклины $y' = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$). Провести интегральные кривые через точки $(0; 2)$ и $(4; 2)$.

Решение. Разрешим уравнение относительно y' :

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Находим изоклины. При $y' = 0$ данное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{x}{y} = 0 \text{ или } x = 0, \quad y \neq 0.$$

Это — уравнение оси Oy с исключенной точкой $(0; 0)$.

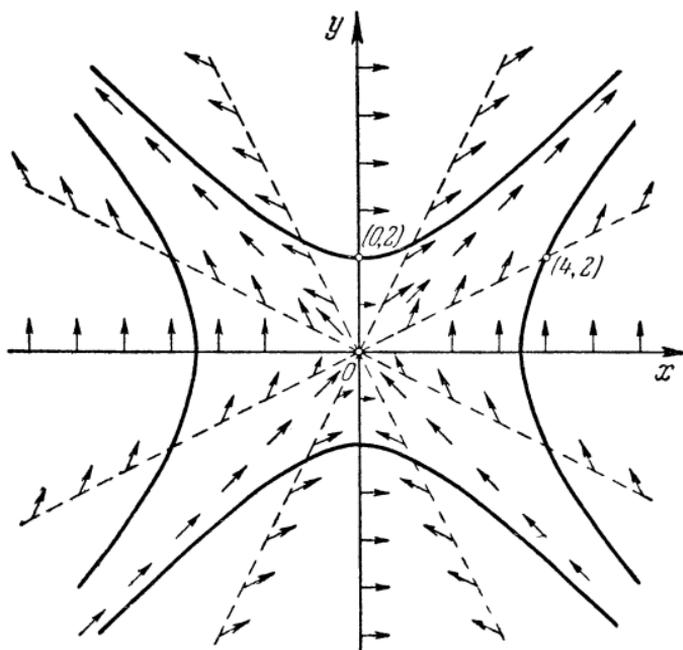


Рис. 14.

Следовательно, если интегральная кривая пересекает ось Oy , то в точках пересечения с осью Oy она имеет касательную, параллельную оси Ox (рис. 14).

Полагая $y' = \frac{1}{2}$, получим изоклину:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad y = 2x, \quad y \neq 0.$$

Это прямая с исключенной точкой $O(0;0)$. Интегральные кривые в точках пересечения с этой прямой имеют касательные с угловым коэффициентом, равным $\frac{1}{2}$.

Аналогично находим изоклины для значений производных $y' = -\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$. Ими будут соответственно прямые с исключенной точкой $O(0;0)$:

$$y = -2x, \quad y = \pm x, \quad y = \pm \frac{1}{2} x.$$

Следует обратить внимание на то, что прямая $y = 0$ (без точки $O(0;0)$) также является изоклиной, в точках которой касательные к интегральным кривым будут параллельны оси Oy .

В самом деле, будем считать в данном уравнении переменную x искомой функцией, а y — аргументом; решая это уравнение относительно x' , будем иметь:

$$x' = \frac{y}{x}.$$

При $x' = 0$ получим изоклину $y = 0$ при $x \neq 0$, что и доказывает наше утверждение.

На каждой изоклине укажем теперь стрелочками направление касательных к интегральным кривым (см. рис. 14). Таким образом, мы построили поле направлений. Теперь приближенно проведем через точку $(0;2)$ интегральную кривую. Такая кривая существует, так как $f(x,y) = \frac{x}{y}$ непрерывна в окрестности точки $(0;2)$, эта кривая будет единственной, так как в окрестности этой точки частная производная

$$\frac{df}{dy} = -\frac{x}{y^2}$$

также непрерывна. Аналогично проводим интегральную кривую через точку $(4;2)$.

Рассматривая поле направлений, можно сделать вывод, что прямые $y = x$ и $y = -x$ (с исключенной точкой

$O(0;0)$) являются интегральными кривыми, а остальные интегральные кривые не будут пересекать этих прямых, они будут к ним асимптотически приближаться.

Замечание. Проинтегрировав данное дифференциальное уравнение, получим семейство равнобочных гипербол:

$$y^2 - x^2 = C$$

Каждая из гипербол имеет две ветви. Поэтому, когда мы приближенно проводили интегральную кривую через точку $(0; 2)$ или $(4; 2)$, мы могли «потерять» вторую ветвь гиперболы. Такая возможность «потерять» еще одну ветвь кривой возникает тогда, когда интегральная кривая имеет асимптоты.

Пример 2. В интервале $1 \leq x \leq 5$ построить приближенно способом Эйлера интегральную кривую уравнения

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{10},$$

проходящую через точку $(1;1)$.

Решение. Так как

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{10}$$

и

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{5}$$

непрерывны при всех значениях x и y , то через всякую точку плоскости проходит интегральная кривая и притом только одна. Следовательно, единственная интегральная кривая пройдет и через точку $(1; 1)$. Для графического построения ее разобьем интервал $1 \leq x \leq 5$ на четыре части точками: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$. Обозначим через y'_0 , y'_1 , y'_2 , y'_3 значения y' соответственно в точках x_0 , x_1 , x_2 , x_3 .

Из начального условия $y_0 = 1$ при $x_0 = 1$ следует, что $y'_0 = \frac{1}{5}$. Для построения направления $y'_0 = \frac{1}{5}$ (рис. 15) на оси Ox слева от оси Oy выбираем полюс P (мы взяли его на расстоянии 1 от оси Oy) и откладываем на оси Oy отрезок ON_1 длины $\frac{1}{5}$. Направление прямой PN_1 будет

совпадать с направлением касательной к интегральной кривой в точке M_0 (1; 1). Проводим через M_0 параллельно PN_1 отрезок M_0M_1 до точки M_1 , абсцисса x которой равна 2. По данным x_0, y_0, y_0' и x_1 , вычислим y_1 по формуле:

$$y_1 - y_0 = f'(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

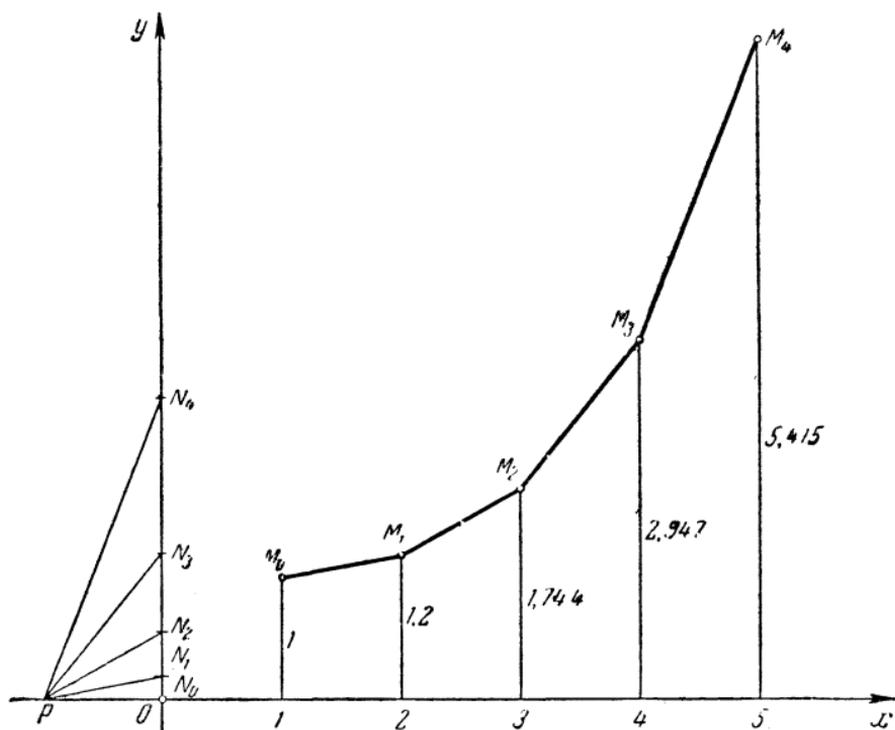


Рис. 15.

в нашем случае

$$y_1 - 1 = \frac{1}{5} (2 - 1), \text{ или } y_1 = 1,2.$$

По полученным $x_1 = 2, y_1 = 1,2$ находим:

$$y_1' = \frac{4 + 1,41}{10} = 0,544.$$

Строим направление PN_2 и проводим отрезок M_1M_2 параллельно PN_2 .

Вычисляем y_2 :

$$y_2 = 1,2 + 0,544 = 1,744.$$

Затем находим:

$$y_2' = \frac{9 + 1,744^2}{10} \approx 1,203,$$

строим направление PN_3 , проводим отрезок $M_2M_3 \parallel PN_3$ и вычисляем:

$$y_3 = 1,744 + 1,203 = 2,947.$$

Наконец,

$$y_3' = \frac{16 + 2,947^2}{10} \approx 2,468;$$

строим PN_4 и $M_3M_4 \parallel PN_4$, вычисляем:

$$y_4 = 2,947 + 2,468 = 5,415.$$

Таким образом, мы приближенно построили искомую интегральную кривую. Если бы мы разбили интервал на более мелкие отрезки, то получили бы более точный график интегральной кривой (соответственно более точное значение искомой функции в точке $x = 5$).

147. Построить поле направлений для уравнения

$$y' = x^2 + y^2$$

(построить изоклины $y' = \frac{1}{4}, 1, 2, 4$). Провести интегральные кривые через точки $(0; 0), (\sqrt{2}; 0), (2; 0)$.

148. Используя метод Эйлера, построить приближенно в интервале $0,5 \leq x \leq 3,5$ интегральную кривую дифференциального уравнения

$$y' = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

проходящую через точку $(0,5; 0,5)$.

§ 7. Особые решения. Уравнения Клеро

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел I, гл. III, § 2, 3, или Степанов, гл. III, § 3, п° 4, § 4, или Бермант, II, гл. XIV, п° 197, I, II, III.

Пример 1. Найти огибающую семейства окружностей:

$$(x - C)^2 + y^2 = \frac{C^2}{2}.$$

Решение. Уравнение семейства можно записать так:

$$F(x, y, C) = (x - C)^2 + y^2 - \frac{C^2}{2} = 0.$$

Дифференцируем уравнение семейства по C :

$$\frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = -2(x - C) - C.$$

Исключая C из уравнений

$$\frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0 \text{ и } F(x, y, C) = 0,$$

получим уравнение огибающей семейства. В нашей задаче имеем:

$$\begin{cases} 2(x - C) + C = 0, \\ (x - C)^2 + y^2 = \frac{C^2}{2}. \end{cases}$$

Исключая из этой системы C , получим:

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Это уравнение определяет две прямые — биссектрисы координатных углов:

$$x - y = 0 \text{ и } x + y = 0.$$

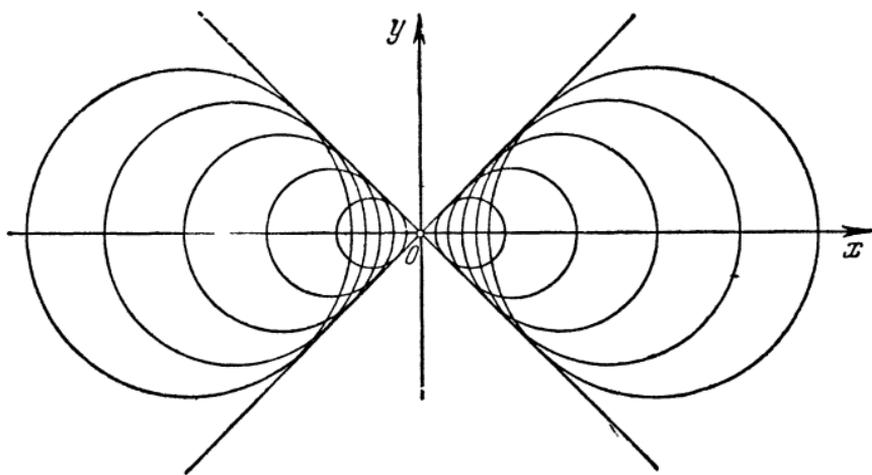


Рис. 16.

Таким образом, данное семейство окружностей имеет две огибающие, которые являются прямыми. На рисунке 16 изображено данное семейство окружностей и огибающие.

Пример 2. Найти общий и особый интегралы уравнения Клеро:

$$y = xy' + \frac{1}{2y'^2}.$$

Решение. 1-й способ. Положим $y' = p(x)$, тогда будем иметь:

$$y = xp + \frac{1}{2p^2}. \quad (*)$$

Дифференцируя левую и правую части этого равенства по x , получим:

$$p = p + xp' - \frac{1}{p^3} p',$$

так как

$$y' = p,$$

или

$$xp' - \frac{1}{p^3} \cdot p' = 0.$$

Выносим p' за скобки:

$$p' \left(x - \frac{1}{p^3} \right) = 0.$$

Но это произведение будет равно нулю, когда или $p' = 0$, или $x - \frac{1}{p^3} = 0$. Из $p' = 0$ получим $p = C$; подставляя в (*) вместо p значение C , получим общее решение уравнения Клеро:

$$y = Cx + \frac{1}{2C^2}.$$

Как видно, общим решением уравнения Клеро является семейство прямых.

Особое решение получаем в параметрической форме (здесь параметром является p) из условия

$$x - \frac{1}{p^3} = 0,$$

к которому нужно присоединить равенство (*), или

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^3}, \\ y = xp + \frac{1}{2p^2}. \end{cases}$$

Исключая параметр p , мы получим особое решение заданного уравнения Клеро:

$$y = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}.$$

Легко проверить, что особое решение уравнения Клеро есть огибающая семейства прямых, представляющих собой общее решение. Этим свойством общего и особого решения можно воспользоваться при интегрировании уравнения Клеро. Общее и особое решения данного уравнения изображены на рисунке 17.

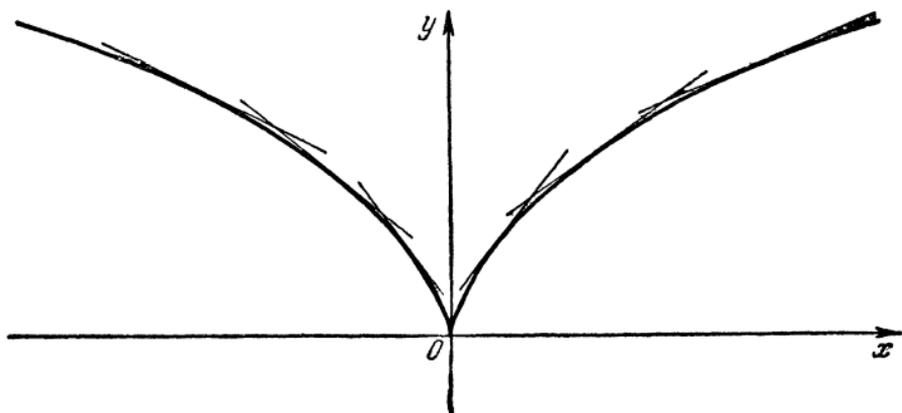


Рис. 17.

2-й способ. Общее решение уравнения Клеро мы находим сразу, подставив в дифференциальное уравнение вместо y' произвольную постоянную C . В нашей задаче общее решение имеет вид:

$$y = Cx + \frac{1}{2C^2}. \quad (**)$$

Так как особое решение есть огибающая семейства интегральных кривых, то, дифференцируя общее решение (**), по C :

$$0 = x - \frac{1}{C^3}, \quad (***)$$

и исключая C из (**), и (***), получим:

$$C = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}, \quad y = x \sqrt[3]{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2 \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}},$$

или

$$y = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}.$$

Это и есть особое решение.

149. Найти огибающую семейства окружностей:

$$(x - C)^2 + y^2 = 4.$$

Построить это семейство и огибающую.

В задачах 150—151 найти общий и особый интегралы уравнения Клеро и построить интегральные кривые.

150. $y = xy' - y'^2.$

151. $y = xy' - \sqrt{1 + y'^2}.$

§ 8. Ортогональные траектории

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел III, гл. III, § 4, или Степанов, гл. III, § 5, или Бермант, II, гл. XIV н° 198.

Пример. Найти семейство ортогональных траекторий к семейству окружностей:

$$x^2 + y^2 = 2Cx.$$

Решение. Находим сначала дифференциальное уравнение данного семейства окружностей. Для этого дифференцируем левую и правую части уравнения семейства, предполагая y функцией x :

$$2x + 2yy' = 2C,$$

или

$$x + yy' = C, \quad (*)$$

и исключаем C из данного уравнения семейства и уравнения (*). В результате получим:

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{C}{2Cx},$$

или

$$2x^2 + 2xyy' = x^2 + y^2,$$

окончательно имеем:

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}. \quad (**)$$

Это и есть дифференциальное уравнение данного семейства окружностей.

Каждая линия семейства ортогональных траекторий должна пересекать линии данного семейства под прямым углом, следовательно, угловые коэффициенты касательных к кривым обоих семейств в точках пересечения соответствующих линий должны удовлетворять условию

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Но геометрически производная есть угловой коэффициент касательной к кривой в заданной точке, поэтому, заменяя в дифференциальном уравнении (***) y' на $-\frac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий, т. е.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y'} &= \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \\ y' &= \frac{2xy}{x^2 - y^2}. \end{aligned} \quad (***)$$

Мы получили однородное уравнение; интегрируем его подстановкой

$$\frac{y}{x} = u \text{ или } y = ux, \quad y' = u'x + u.$$

Подставляя в (***) вместо y и y' их значения, будем иметь:

$$u'x + u = \frac{2x^2u}{x^2 - u^2x^2},$$

или

$$u'x = \frac{2u}{1 - u^2} - u = \frac{2u - u + u^3}{1 - u^2} = \frac{u + u^3}{1 - u^2},$$

т. е.

$$u'x = \frac{u + u^3}{1 - u^2}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{(1 - u^2) du}{u(1 + u^2)} = \frac{dx}{x}.$$

Выполняем интегрирование:

$$\int \frac{(1-u^2) du}{u(1+u^2)} = \ln x + \ln C.$$

Чтобы найти интеграл, стоящий в левой части равенства, разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+D}{1+u^2}.$$

Откуда

$$A + Au^2 + Bu^2 + Du \equiv 1 - u^2.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях u :

$$A + B = -1, \quad D = 0, \quad A = 1,$$

получаем: $A = 1, B = -2, D = 0$.

Таким образом,

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}$$

и

$$\int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)} du = \int \frac{du}{u} - \int \frac{2u du}{1+u^2} = \ln u - \ln(1+u^2).$$

Следовательно,

$$\ln u - \ln(1+u^2) = \ln x + \ln C,$$

или, потенцируя, находим:

$$\frac{u}{1+u^2} = Cx.$$

Подставляем вместо u ее значение $\frac{y}{x}$:

$$\frac{\frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx, \quad \frac{xy}{x^2 + y^2} = Cx.$$

Окончательно получаем:

$$x^2 + y^2 = \frac{y}{C}.$$

Таким образом, семейством ортогональных траекторий является семейство окружностей, проходящих через на-

чало координат, с центрами, расположенными на оси Oy . Данное семейство также является семейством окружностей, проходящих через начало координат, с центрами, расположенными на оси Ox . Оба семейства изображены на рисунке 18.

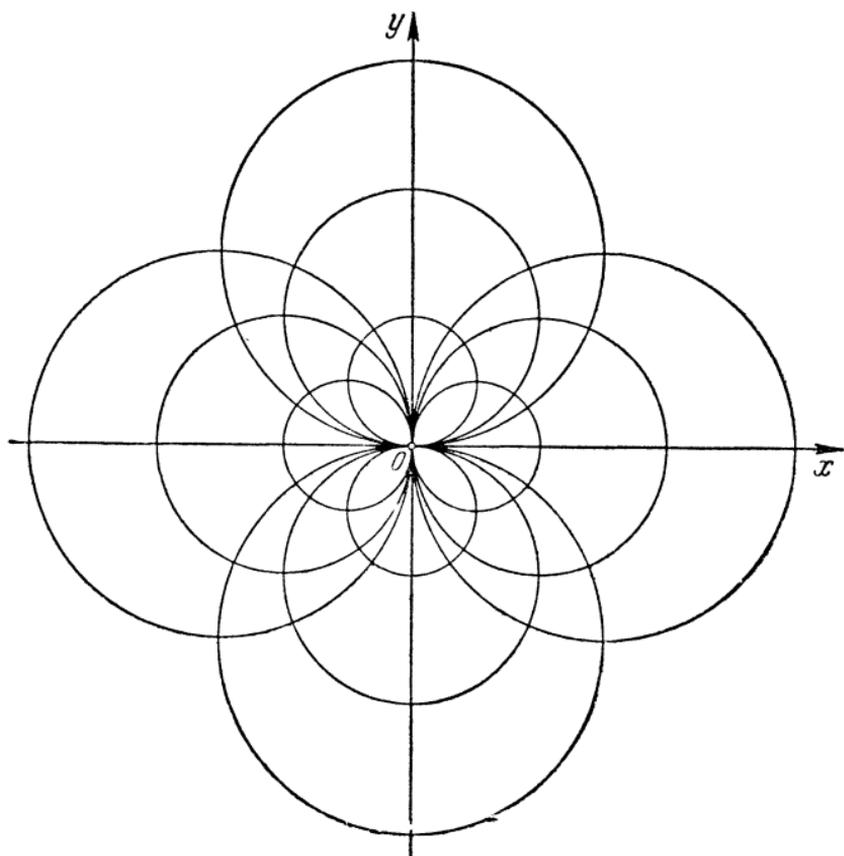


Рис. 18.

152. Найти семейство ортогональных траекторий к семейству парабол: $y^2 = Cx$. Построить оба семейства.

§ 9. Разные задачи

В задачах 153 — 166 проинтегрировать дифференциальные уравнения:

153. $y^2 + x^2 y' = x y y'$.

154. $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x$: найти интегральную кривую, проходящую через точку $M(0;0)$.

$$155. (x + y) dx + (x - y) dy = 0.$$

$$156. y = xy' + \frac{1}{y'}.$$

$$157. \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y dx - x dy}{x^2}.$$

$$158. xy' = y \ln \frac{y}{x}.$$

$$159. 3y'^3 + y = xy'.$$

$$160. xy' + y - e^x = 0.$$

$$161. y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}.$$

$$162. y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}.$$

$$163. (1 + y^2) dx = (\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy) dy.$$

$$164. y^2 dx - (2xy + 3) dy = 0.$$

$$165. \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2.$$

$$166. 3 dy = (1 - 3y^2) y \sin x dx.$$

167. Найти кривую, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной от оси ординат, равен произведению координат точки касания.

168. Капля с начальной массой M_0 г, свободно падая в воздухе, равномерно испаряется, теряя каждую секунду a г. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения капли (коэффициент пропорциональности равен k). Найти зависимость скорости движения капли от времени, если в начальный момент времени скорость капли равнялась нулю. Считать, что $k \neq 2a$.

Указание. Так как в этом процессе масса капли переменна, то следует воспользоваться зависимостью;

$$\frac{d(mv)}{dt} = F$$

(изменение количества движения равно действующей силе). В этой формуле m — масса, v — скорость, F — действующая сила, t — время.

169. Найти кривую, касательные к которой образуют с осями координат треугольник постоянной площади, равной $2a^2$.

§ 10. Дополнительные задачи к главе I

Подстановка. В некоторых случаях дифференциальное уравнение можно свести к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $ax + by + c = u$, где a , b и c соответственно подобраны. В задачах 170—172, используя указанную подстановку, найти общие решения заданных дифференциальных уравнений.

$$170. y' = (x - y)^2 + 1.$$

$$171. y' = \sin(x - y). \quad 172. (x + y)^2 y' = a^2.$$

173. Используя подстановку $xy = u$, проинтегрировать дифференциальные уравнения:

$$а) 2y' + y^2 - \frac{1}{x^2} = 0; \quad б) x^2(y' + y^2) = xy - 1.$$

174. Доказать, что если

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

— однородное уравнение, а $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ — полный дифференциал то общий интеграл данного уравнения имеет вид:

$$P(x, y)x + Q(x, y)y = C.$$

Интегрирующий множитель. Если левая часть уравнения

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (*)$$

не является полным дифференциалом и выполнены условия теоремы Коши, то существует функция $\mu(x, y)$ — *интегрирующий множитель* — такая, что

$$\mu(P dx + Q dy) = du.$$

Отсюда следует, что функция μ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q). \quad (**)$$

В общем случае найти μ и уравнения (***) не проще, чем проинтегрировать уравнение (*). Однако интегрирующий множитель легко находится в двух случаях:

$$1) \text{ когда } \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = F(x), \text{ тогда } \mu = \mu(x).$$

$$2) \text{ когда } \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = F_1(y), \text{ тогда } \mu = \mu(y).$$

Пример. Найти общий интеграл уравнения:

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) dx + (x^2 + y^2) dy = 0.$$

Решение. Здесь

$$P = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}, \quad Q = x^2 + y^2.$$

Находим:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

Составляем разность:

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + x^2 + y^2 - 2x = x^2 + y^2.$$

Теперь смотрим, в каком случае при делении полученной разности на функцию P или Q получится $F_1(y)$ или $F(x)$. Очевидно, что нужный результат получится при делении на Q , а именно:

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Следовательно, существует интегрирующий множитель, зависящий только от x :

$$\mu = \mu(x).$$

Для разыскания $\mu(x)$ воспользуемся уравнением (**), которое развернем, уже предполагая, что $\mu = \mu(x)$. Имеем:

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{d\mu}{dx}.$$

Откуда

$$Q \frac{d\mu}{dx} = \mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$$

или

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx,$$

но

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 1,$$

поэтому

$$\frac{d\mu}{\mu} = dx, \quad \ln \mu = x \quad \text{и} \quad \mu = e^x.$$

Таким образом, интегрирующим множителем будет $\mu = e^x$. Умножая заданное уравнение на e^x , получим уравнение в полных дифференциалах:

$$e^x \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + e^x (x^2 + y^2) dy = 0.$$

Интегрируем его способом, рассмотренным в § 5. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x (x^2 + y^2).$$

Интегрируя левую и правую части по y , получим:

$$u(x, y) = \int e^x (x^2 + y^2) dy;$$

или

$$u(x, y) = e^x x^2 y + e^x \frac{y^3}{3} + \varphi(x).$$

Чтобы найти $\varphi(x)$, используем, с одной стороны, то, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right),$$

с другой стороны,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^x x^2 y + e^x \frac{y^3}{3} \right)'_x + \varphi'(x)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + 2xy \right) + \varphi'(x).$$

Таким образом,

$$\varphi'(x) = 0 \text{ и } \varphi(x) = C.$$

Поэтому общим интегралом заданного уравнения будет

$$ye^x \left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right) = C.$$

В задачах 175—177 проинтегрировать дифференциальные уравнения, допускающие интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$.

175. $(x + y^2) dx + 2xy dy = 0.$

176. $y(1 + xy) dx - x dy = 0.$

177. $\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0.$

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной. Если уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \quad (*)$$

содержит, например, производную y' во второй степени, то, разрешая это уравнение относительно y' , получим два уравнения:

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y). \quad (**)$$

Таким образом, через каждую точку $M(x_0; y_0)$ некоторой области проходят, вообще говоря, две интегральные кривые. Общий интеграл уравнения (*) в этом случае, вообще говоря, имеет вид:

$$\Phi(x, y, C) = \Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) = 0,$$

где Φ_1 и Φ_2 — общие интегралы уравнений (**). Кроме того, для уравнения (*) может существовать особый интеграл.

Пример. Найти общий и особый интегралы уравнения:

$$x^2 y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0.$$

Решение. Разрешаем заданное уравнение относительно y' :

$$y' = \frac{-3xy \pm \sqrt{9x^2y^2 - 8x^2y^2}}{2x^2} = \frac{-3xy \pm xy}{2x^2} = \frac{-3y \pm y}{2x}.$$

Мы получили два уравнения:

$$y' = -\frac{y}{x} \quad \text{и} \quad y' = -\frac{2y}{x}.$$

Интегрируем первое уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

откуда

$$\ln y = -\ln x + \ln C,$$

$$y = \frac{C}{x} \quad \text{или} \quad xy - C = 0.$$

Теперь интегрируем второе уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x},$$

$$\ln y = -2 \ln x + \ln C,$$

$$y = \frac{C}{x^2}, \quad x^2 y - C = 0.$$

Таким образом, общими интегралами полученных дифференциальных уравнений являются функции:

$$xy - C = 0 \text{ и } x^2 y - C = 0.$$

Общим интегралом заданного дифференциального уравнения будет:

$$(xy - C)(x^2 y - C) = 0$$

или

$$x^3 y^2 - Cxy(x+1) + C^2 = 0. \quad (*)$$

Теперь выясняем, существует ли особый интеграл заданного дифференциального уравнения. Для этого найдем огибающую семейства интегральных кривых (*). Дифференцируем по C :

$$-xy(x+1) + 2C = 0,$$

$$C = \frac{xy(x+1)}{2}.$$

Подставляем найденное значение C в (*):

$$x^3 y^2 - \frac{x^2 y^2 (x+1)^2}{2} + \frac{x^2 y^2 (x+1)^2}{4} = 0,$$

$$\frac{4x^3 y^2 - x^2 y^2 (x+1)^2}{4} = 0,$$

$$x^2 y^2 [4x - (x+1)^2] = 0,$$

$$-x^2 y^2 (x-1)^2 = 0.$$

Огибающая семейства представляет собой ряд линий:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

Линии $x = 0$, $y = 0$ входят в общее решение при $C = 0$, поэтому они не являются особыми решениями. Проверяем, является ли функция $x = 1$ особым решением. Для этого в заданном уравнении будем считать x функцией от y и перепишем его в виде:

$$\frac{x^2}{x'^2} + \frac{3xy}{x'} + 2y^2 = 0. \quad (**)$$

Находим производную от функции $x = 1$:

$$x' = 0$$

и, подставляя значения x и x' в уравнение (**), убеждаемся, что $x = 1$ не является решением заданного уравнения.

Таким образом, общим интегралом заданного дифференциального уравнения является

$$x^3 y^2 - Cxy(x+1) + C^2 = 0.$$

Особого интеграла нет.

В задачах 178 — 179 найти общие и особые интегралы уравнений.

178. $yy'^2 - (xy + 1)y' + x = 0.$

179. $yy'^2 - 2xy' + y = 0.$

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$y = \varphi(x, y'),$$

то, полагая $y' = p$, получим систему уравнений:

$$p = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{dp}{dx},$$

$$y = \varphi(x, p),$$

из которой находим переменные x и y , как функции параметра p .

Аналогично для дифференциального уравнения вида:

$$x = \psi(y, y')$$

x и y определяются из системы уравнений:

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{dp}{dy},$$

$$x = \psi(y, p).$$

Пример. Найти общий и особый интегралы уравнения:

$$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$$

Решение. Полагая $y' = p$, перепишем заданное уравнение в виде

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}.$$

Дифференцируя по x , считая p функцией от x , находим:

$$p = 2p \frac{dp}{dx} - p - x \frac{dp}{dx} + x.$$

или

$$\frac{dp}{dx} (2p - x) = 2p - x \text{ или } \frac{dp}{dx} = 1.$$

Интегрируя, получим:

$$p = x + C.$$

Подставляя в первоначальное уравнение, получим общее решение:

$$y = (x + C)^2 - x(x + C) + \frac{x^2}{2}$$

или

$$y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

Для отыскания особого решения дифференцируем общее решение по C :

$$x + 2C = 0 \text{ или } C = -\frac{x}{2}.$$

Подставляя найденное значение C в общее решение, получим огибающую семейства интегральных кривых:

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

Проверим, удовлетворяет ли функция $y = \frac{x^2}{4}$ данному дифференциальному уравнению, находим $y' = \frac{x}{2}$ и делаем подстановку:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} - x \cdot \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

Видим, что функция $y = \frac{x^2}{4}$ обращает заданное уравнение в тождество, и она не может быть получена из общего решения ни при каком значении C .

Таким образом, общим решением заданного дифференциального уравнения является функция

$$y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2,$$

а особым решением

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

Замечание. При решении этого примера мы произвели сокращение на $2p - x$. Если этот множитель приравнять нулю, то получим $p = \frac{x}{2}$ и, подставив p в данное уравнение, получим $y = \frac{x^2}{4}$ — то же самое особое решение.

В задачах 180 — 182, вводя параметр $p = y'$, проинтегрировать заданные уравнения.

180. $x = \sin y' + \ln y'$. 181. $y = y'^2 e^{y'}$.

182. $4y = x^2 + y'^2$.

Уравнение Лагранжа. Уравнение вида

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

называется *уравнением Лагранжа*. Оно интегрируется подстановкой $y' = p$. Применяв эту подстановку, будем иметь:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \quad (*)$$

Далее дифференцируем по x , учитывая что $p = p(x)$ и $y' = p$; будем иметь:

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]p'$$

или

$$p dx = \varphi(p) dx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)] dp. \quad (**)$$

Получается дифференциальное уравнение линейное относительно x .

Проинтегрировав уравнение (**), получим, учитывая (*), общее решение уравнения Лагранжа в параметрической форме. Кроме того, может существовать особое решение, которое отыскивается обычными приемами.

При $\varphi(p) = p$ уравнение Лагранжа превращается в уравнение Клеро (см. § 7).

Пример. Найти общий и особый интегралы уравнения Лагранжа:

$$y = (1 + y')x + y'^2.$$

Решение. Делаем подстановку $y' = p$:

$$y = (1 + p)x + p^2.$$

Дифференцируем по x , учитывая, что $dy = p dx$,

$$p dx = (1 + p) dx + x dp + 2p dp,$$

или

$$p dx = dx + p dx + (x + 2p) dp,$$

или

$$- dx = (x + 2p) dp.$$

Следовательно,

$$\frac{dx}{dp} + x = -2p$$

— линейное дифференциальное уравнение относительно x .

Полагаем $x = uv$, $x' = u'v + v'u$, будем иметь:

$$u'v + v'u + uv = -2p,$$

тогда

$$u'v + u(v' + v) = -2p. \quad (*)$$

Далее полагаем

$$\frac{dv}{dp} + v = 0, \quad \frac{dv}{dp} = -v, \quad \frac{dv}{v} = -dp,$$

$$\ln v = -p, \quad v = e^{-p}.$$

Найденное значение v подставляем в (*), будем иметь:

$$u'e^{-p} = -2p$$

или

$$\frac{du}{dp} = -2pe^p, \quad du = -2pe^p dp.$$

Выполняем интегрирование:

$$u = -2 \int pe^p dp.$$

Интегрированием по частям находим интеграл, стоящий в правой части равенства:

$$\int pe^p dp = pe^p - \int e^p dp = pe^p - e^p - \frac{C}{2}.$$

Таким образом,

$$u = -2pe^p + 2e^p + C, \\ x = uv = (-2pe^p + 2e^p + C)e^{-p} = 2 - 2p + Ce^{-p}.$$

Присоединяя к полученному выражению для x выражение для y , в которое вместо x подставим его значение, получим общее решение заданного уравнения Лагранжа в параметрической форме:

$$\begin{aligned}x &= 2 - 2p + Ce^{-p}, \\y &= (1 + p)(2 - 2p + Ce^{-p}) + p^2,\end{aligned}$$

или, упрощая выражение для y :

$$\begin{cases}x = Ce^{-p} - 2p + 2, \\y = Ce^{-p}(1 + p) - p^2 + 2.\end{cases}$$

Для разыскания особого интеграла согласно общему правилу (см. Степанов, гл. III, § 4, п° 2) берем уравнение

$$y = (1 + p)x + p^2$$

и дифференцируем его по p , считая x , y и p независимыми переменными, тогда

$$0 = x + 2p.$$

Из системы

$$\begin{cases}y = (1 + p)x + p^2, \\x + 2p = 0\end{cases}$$

исключаем p :

$$p = -\frac{x}{2}, \quad y = \left(1 - \frac{x}{2}\right)x + \frac{x^2}{4},$$

или

$$y = x - \frac{x^2}{4}.$$

Подстановкой в уравнение

$$y = (1 + y')x + y'^2$$

функции $y = x - \frac{x^2}{4}$ убеждаемся, что последняя не является решением. Следовательно, заданное дифференциальное уравнение не имеет особого решения.

В задачах 183—184 найти общий интеграл уравнения Лагранжа.

$$183. \quad y = 2y'x + \frac{1}{y'}.$$

$$184. \quad y = y' + \sqrt{1 - y'^2}.$$

ГЛАВА II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел III, гл. IV, § 1, 2, или Степанов, гл. IV, § 2, п° 1, § 3, п° 2, или Бермант, гл. XIV, п° 199, 200.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' = x + \sin x.$$

Решение. Это — дифференциальное уравнение вида $y''' = f(x)$. Его общее решение находим последовательным трехкратным интегрированием. Имеем:

$$y'' = \int (x + \sin x) dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1,$$

$$y' = \int \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2,$$

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2 \right) dx = \\ &= \frac{x^4}{24} + \cos x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \frac{x^4}{24} + \cos x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3.$$

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''(x^2 + 1) = 2xy',$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 3.$$

Решение. Данное уравнение допускает понижение порядка, так как в него не входит в явном виде y . Произведем понижение порядка. Положим $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x)$. Подставив эти значения y' и y'' в данное уравнение, получим:

$$p'(x^2 + 1) = 2xp,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x dx}{x^2 + 1}.$$

Производим интегрирование:

$$\ln p = \ln(x^2 + 1) + \ln C_1,$$

откуда

$$p = C_1(x^2 + 1).$$

Но $p = y'$, поэтому

$$y' = C_1(x^2 + 1), \quad (*)$$

откуда

$$y = C_1 \int (x^2 + 1) dx = \frac{C_1 x^3}{3} + C_1 x + C_2. \quad (**)$$

Мы получили общее решение данного дифференциального уравнения.

Теперь, используя начальные условия, найдем частное решение. Так как $y' = 3$ при $x = 0$, то, подставляя эти значения в (*), найдем C_1 :

$$3 = C_1 \cdot 1,$$

следовательно, $C_1 = 3$.

Условие $y = 1$ при $x = 0$ подставляем в (**):

$$1 = C_2.$$

Таким образом, из начальных условий вытекает, что $C_1 = 3$, $C_2 = 1$ и искомое частное решение имеет вид:

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

Пример 3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение:

$$y(1 - \ln y) y'' + (1 + \ln y) y'^2 = 0.$$

Решение. Данное уравнение не содержит в явном виде x , поэтому оно допускает понижение порядка. Положим:

$$\frac{dy}{dx} = p(y), \text{ тогда } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

Здесь при отыскании $\frac{d^2y}{dx^2}$ мы приняли во внимание, что y есть функция от y , а y — функция от x . Подставляя полученные значения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ в данное уравнение, будем иметь:

$$y(1 - \ln y) p \frac{dp}{dy} + (1 + \ln y) p^2 = 0.$$

После сокращения на p (если $p = 0$, то $y = C$ — это одно из решений данного уравнения, не представляющее интереса) мы получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными (здесь искомой функцией является p , а аргументом y). Разделяем переменные:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{1 + \ln y}{y(1 - \ln y)} dy.$$

Выполняем интегрирование:

$$\ln p = - \int \frac{1 + \ln y}{y(1 - \ln y)} dy.$$

Находим интеграл, стоящий в правой части:

$$\begin{aligned} \int \frac{-1 - \ln y}{y(1 - \ln y)} dy &= \int \frac{(1 - \ln y) - 2}{1 - \ln y} d \ln y = \\ &= \int d \ln y - 2 \int \frac{d \ln y}{1 - \ln y} = \ln y + 2 \ln(\ln y - 1) + \ln C_1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\ln p = \ln y + 2 \ln(\ln y - 1) + \ln C_1,$$

или

$$p = C_1 y (\ln y - 1)^2.$$

Но $p = \frac{dy}{dx}$, поэтому

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y (\ln y - 1)^2,$$

или

$$\frac{dy}{y (\ln y - 1)^2} = C_1 dx.$$

Интегрируем почленно:

$$\int \frac{dy}{y (\ln y - 1)^2} = \int C_1 dx,$$

откуда

$$-\frac{1}{\ln y - 1} = C_1 x + C_2.$$

Таким образом,

$$(C_1 x + C_2) (1 - \ln y) = 1$$

есть общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Пример 4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение:

$$x^2 y''' = y''^2.$$

Решение. Данное уравнение не содержит в явном виде y и y' , поэтому оно допускает понижение порядка. Положим $y'' = p(x)$, тогда $y''' = p'$. Подставляем эти выражения для y'' и y''' в данное уравнение:

$$x^2 p' = p^2.$$

Мы получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Интегрируем его:

$$\frac{dp}{p^2} = \frac{dx}{x^2}.$$

Откуда

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{C_1},$$

или

$$p = \frac{C_1 x}{C_1 + x}.$$

Но $p = y''$, поэтому

$$y'' = \frac{C_1 x}{C_1 + x}.$$

Дважды последовательно интегрируя последнее равенство будем иметь:

$$\begin{aligned} y' &= C_1 \int \frac{x dx}{C_1 + x} = C_1 \int \frac{x + C_1 - C_1}{C_1 + x} dx = \\ &= C_1 \int dx - C_1^2 \int \frac{dx}{C_1 + x} = C_1 x - C_1^2 \ln(C_1 + x) + C_2, \\ y &= \int [C_1 x - C_1^2 \ln(C_1 + x) + C_2] dx = \\ &= \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x - C_1^2 \int \ln(C_1 + x) dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл берем по частям, положим

$$u = \ln(C_1 + x), \quad dv = dx,$$

тогда

$$du = \frac{dx}{C_1 + x}, \quad v = x.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \ln(C_1 + x) dx &= x \ln(C_1 + x) - \int \frac{x}{C_1 + x} dx = \\ &= x \ln(C_1 + x) - \int \frac{x + C_1 - C_1}{C_1 + x} dx = \\ &= x \ln(C_1 + x) - x + C_1 \ln(C_1 + x) + C_3. \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} y &= \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x - C_1^3 x \ln(C_1 + x) + C_1^2 x - \\ &\quad - C_1^3 \ln(C_1 + x) + C_3. \end{aligned}$$

Пример 5. Материальная точка массы m падает на землю с высоты h . Найти закон движения точки, если сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.

Решение. Выберем начало координат в начальном положении материальной точки и направим ось Oy вертикально вниз. Дифференциальное уравнение составляем, используя второй закон Ньютона:

$$ma = F,$$

где m — масса, $a = \frac{d^2y}{dt^2}$ — ускорение движения, а F — действующая сила. В данном случае на материальную точку действует сила тяжести mg и сила сопротивления среды, равная kv^2 , k — коэффициент пропорциональности. Поэтому мы получаем уравнение:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - k \left(\frac{dy}{dt} \right)^2. \quad (*)$$

Уравнение (*) является дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащим в явном виде искомой функции. Оно допускает понижение порядка при помощи подстановки $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$.

Тогда вместо (*) приходим к уравнению:

$$mv' = mg - kv^2.$$

Разделив на m и обозначив $\frac{k}{mg} = b^2$, приведем его к виду:

$$v' = \frac{g}{b^2} (b^2 - v^2).$$

Разделяем переменные:

$$\frac{b^2}{g} \cdot \frac{dv}{b^2 - v^2} = dt$$

и интегрируем:

$$\frac{b}{2g} \ln \frac{b+v}{b-v} = t + C_1.$$

Так как при $t = 0$, $v = 0$, то $C_1 = 0$, поэтому

$$\frac{b}{2g} \ln \frac{b+v}{b-v} = t, \text{ или } \ln \frac{b+v}{b-v} = \frac{2gt}{b},$$

или

$$\frac{b+v}{b-v} = e^{\frac{2g}{b} t}.$$

Из последнего равенства находим:

$$v = b \frac{e^{\frac{2g}{b} t} - 1}{e^{\frac{2g}{b} t} + 1}. \quad (**)$$

Для получения закона движения достаточно проинтегрировать промежуточный интеграл (**):

$$y = b \int \frac{e^{\frac{2g}{b}t} - 1}{e^{\frac{2g}{b}t} + 1} dt.$$

Чтобы найти последний интеграл, воспользуемся подстановкой:

$$e^{\frac{2g}{b}t} = x, \quad e^{\frac{2g}{b}t} \cdot \frac{2g}{b} dt = dx,$$

или $dt = \frac{b}{2g} \frac{dx}{x}$. Производя указанную подстановку, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{\frac{2g}{b}t} - 1}{e^{\frac{2g}{b}t} + 1} dt &= \frac{b}{2g} \int \frac{x - 1}{(x + 1)x} dx = \\ &= \frac{b}{2g} \int \frac{2x - (x + 1)}{(x + 1)x} dx = \frac{b}{2g} \int \frac{2}{x + 1} dx - \frac{b}{2g} \int \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{b}{g} \ln(x + 1) - \frac{b}{2g} \ln x + \ln C_2 = \\ &= \frac{b}{g} \ln\left(e^{\frac{2g}{b}t} + 1\right) - \frac{b}{2g} \frac{2g}{b} t + \ln C_2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y = \frac{b^2}{g} \ln\left(e^{\frac{2g}{b}t} + 1\right) - bt + b \ln C_2.$$

В выбранной системе координат при $t = 0$, $y = 0$, поэтому

$$\frac{b^2}{g} \ln 2 + b \ln C_2 = 0 \quad \text{и} \quad b \ln C_2 = -\frac{b^2}{g} \ln 2.$$

Поэтому уравнение движения имеет вид:

$$\begin{aligned} y &= \frac{b^2}{g} \left[\ln\left(e^{\frac{2g}{b}t} + 1\right) - \ln 2 \right] - bt = \\ &= \frac{b^2}{g} \ln \frac{e^{\frac{2g}{b}t} + 1}{2} - bt. \end{aligned}$$

В задачах 185—191 проинтегрировать дифференциальные уравнения:

$$185. xy'' = 1 + x^2.$$

$$186. xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$$

$$187. y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0.$$

$$188. y''' = y''^3.$$

$$189. xy'' - y' = e^x x^2.$$

$$190. y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2.$$

$$191. (1 + x^2) y'' + 2xy' = x^3.$$

192. Моторная лодка весом 300 кг движется прямолинейно с начальной скоростью 20 м/сек. Сопротивление среды пропорционально скорости и равно 10 кг при скорости 1 м/сек. Через сколько времени скорость лодки будет равна 2 м/сек?

§ 2. Линейные однородные уравнения

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел III, гл. V, § 1—6, или Степанов, гл. V, § 1, 2, или Бермант, II, гл. XIV, п° 202.

Пример 1. Функции x , x^3 , e^x являются решениями некоторого линейного однородного уравнения 3-го порядка. Показать, что они образуют фундаментальную систему решений. Написать это уравнение.

Решение. Чтобы показать, что данные функции образуют фундаментальную систему решений, нужно показать, что они линейно независимы. Для этого составим определитель Вронского и вычислим его:

$$\begin{aligned} V(y_1, y_2, y_3) &= \begin{vmatrix} x & x^3 & e^x \\ 1 & 3x^2 & e^x \\ 0 & 6x & e^x \end{vmatrix} = \\ &= e^x \begin{vmatrix} x & x^3 & 1 \\ 1 & 3x^2 & 1 \\ 0 & 6x & 1 \end{vmatrix} = e^x x \begin{vmatrix} 3x^2 & 1 \\ 6x & 1 \end{vmatrix} - e^x \begin{vmatrix} x^3 & 1 \\ 6x & 1 \end{vmatrix} = \\ &= e^x x(3x^2 - 6x) - e^x(x^3 - 6x) = e^x(3x^3 - 6x^2 - x^3 + 6x) = \\ &= 2e^x(x^3 - 3x^2 + 3x) \neq 0. \end{aligned}$$

Так как определитель Вронского для данной системы функций не равен тождественно нулю, то эти функции линейно независимы, и, значит, они образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка.

Общее решение искомого уравнения будет:

$$y = C_1 x + C_2 x^3 + C_3 e^x.$$

Чтобы составить искомое дифференциальное уравнение, составляем определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y \\ y_1' & y_2' & y_3' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y''' \end{vmatrix}$$

и приравниваем его нулю. В этом определителе y_1, y_2, y_3 — частные линейно независимые решения искомого уравнения, а y — искомая функция. В нашем примере будем иметь:

$$\begin{vmatrix} x & x^3 & e^x & y \\ 1 & 3x^2 & e^x & y' \\ 0 & 6x & e^x & y'' \\ 0 & 6 & e^x & y''' \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагаем этот определитель по элементам последнего столбца:

$$\begin{aligned} & -y \begin{vmatrix} 1 & 3x^2 & e^x \\ 0 & 6x & e^x \\ 0 & 6 & e^x \end{vmatrix} + y' \begin{vmatrix} x & x^3 & e^x \\ 0 & 6x & e^x \\ 0 & 6 & e^x \end{vmatrix} - \\ & -y'' \begin{vmatrix} x & x^3 & e^x \\ 1 & 3x^2 & e^x \\ 0 & 6 & e^x \end{vmatrix} + y''' \begin{vmatrix} x & x^3 & e^x \\ 1 & 3x^2 & e^x \\ 0 & 6x & e^x \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Производим вычисления определителей:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3x^2 & e^x \\ 0 & 6x & e^x \\ 0 & 6 & e^x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & e^x \\ 6 & e^x \end{vmatrix} = e^x 6(x-1);$$

$$\begin{vmatrix} x & x^3 & e^x \\ 0 & 6x & e^x \\ 0 & 6 & e^x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 6x & e^x \\ 6 & e^x \end{vmatrix} = 6e^x x(x-1);$$

$$\begin{vmatrix} x & x^3 & e^x \\ 1 & 3x^2 & e^x \\ 0 & 6 & e^x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 3x^2 & e^x \\ 6 & e^x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^3 & e^x \\ 6 & e^x \end{vmatrix} =$$

$$= e^x x(3x^2 - 6) - e^x(x^3 - 6) = e^x(2x^3 - 6x + 6);$$

$$\begin{vmatrix} x & x^3 & e^x \\ 1 & 3x^2 & e^x \\ 0 & 6x & e^x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 3x^2 & e^x \\ 6x & e^x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^3 & e^x \\ 6x & e^x \end{vmatrix} =$$

$$= e^x x^2(3x - 6) - e^x x(x^2 - 6) = e^x(2x^3 - 6x^2 + 6x).$$

Таким образом,

$$-e^x \cdot 6(x-1)y + 6e^x x(x-1)y' - e^x(2x^3 - 6x + 6)y'' + e^x(2x^3 - 6x^2 + 6x)y''' = 0$$

или, сокращая на $2e^x$, получим искомое дифференциальное уравнение:

$$(x^3 - 3x^2 + 3x)y''' - (x^3 - 3x + 3)y'' + 3x(x-1)y' - 3(x-1)y = 0.$$

Замечание. К этому результату можно было прийти и другим способом, используя общее решение:

$$y = C_1 x + C_2 x^3 + C_3 e^x. \quad (*)$$

Продифференцировав его трижды, получим:

$$\left. \begin{aligned} y' &= C_1 + 3C_2 x^2 + C_3 e^x, \\ y'' &= 6C_2 x + C_3 e^x, \\ y''' &= 6C_2 + C_3 e^x \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Решив систему (**) относительно C_1, C_2, C_3 , подставив их значения в (*), получим искомое дифференциальное уравнение.

Пример 2. Дифференциальное уравнение

$$(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$$

имеет решение $y_1 = e^x$. Найти решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=1} = 0, \quad y'|_{x=1} = 1.$$

Решение. Чтобы найти общее решение данного уравнения, нужно знать два линейно независимых частных решения. Одно частное решение $y' = e^x$ нам дано. Второе будем искать в виде:

$$y_2 = u y_1 = u e^x .$$

Находим производные:

$$y_2' = u' e^x + u e^x ,$$

$$y_2'' = u'' e^x + u' e^x + u' e^x + u e^x = u'' e^x + 2u' e^x + u e^x .$$

Подставляя y_2 , y_2' , y_2'' в данное уравнение, получим:

$$(2x - x^2)(u'' + 2u' + u) e^x + (x^2 - 2)(u' + u) e^x + + 2(1 - x)u e^x = 0,$$

или

$$2x u'' - x^2 u'' + 4x u' - 2x^2 u' + 2xu - x^2 u + x^2 u' - - 2u' + x^2 u - 2u + 2u - 2xu = 0.$$

После приведения подобных мы приходим к дифференциальному уравнению относительно u :

$$(2x - x^2) u'' - (x^2 - 4x + 2) u' = 0,$$

допускающему понижение порядка, так как оно не содержит в явном виде искомой функции u . Поэтому полагаем

$$u' = p(x), \text{ тогда } u'' = p'$$

и уравнение примет вид:

$$(2x - x^2) p' - (x^2 - 4x + 2) p = 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 2x} dx.$$

Выполняем интегрирование:

$$\ln p = - \int \frac{x^2 - 2x - 2x + 2}{x^2 - 2x} dx = -x + \ln(x^2 - 2x).$$

Здесь мы взяли постоянное слагаемое равным нулю, так как нам нужно какое-нибудь решение. Таким образом,

$$p = e^{-x} (x^2 - 2x).$$

Но $p = u'$, следовательно, интегрируя дважды по частям, получим:

$$\begin{aligned} u &= \int e^{-x}(x^2 - 2x) dx = -x(x-2)e^{-x} + \\ &+ 2 \int (x-1)e^{-x} dx = -x(x-2)e^{-x} - \\ &- 2(x-1)e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = -(x^2 - 2x)e^{-x} - \\ &- (2x - 2)e^{-x} - 2e^{-x} = -x^2 e^{-x} \end{aligned}$$

(постоянное слагаемое берем равным нулю).

Итак,

$$y_2 = y_1 u = -e^x x^2 e^{-x} = -x^2,$$

и общее решение заданного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 x^2.$$

Найдем теперь частное решение этого уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Для этого в общее решение

$$y = C_1 e^x + C_2 x^2$$

и его производную

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 x$$

подставляем значение $x = 1$, $y = 0$, $y' = 1$. Мы получим систему:

$$\begin{cases} 0 = C_1 e + C_2, \\ 1 = C_1 e + 2C_2, \end{cases}$$

решая которую, найдем значения произвольных постоянных:

$$C_2 = 1, C_1 = -\frac{1}{e} = -e^{-1}.$$

Искомым частным решением будет:

$$y = -e^{x-1} + x^2.$$

193. Функции e^x и $x^2 e^x$ удовлетворяют некоторому однородному линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка. Показать, что они образуют фундаментальную систему, и составить уравнение.

194. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0,$$

зная одно его частное решение $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

§ 3. Линейные неоднородные уравнения

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел III, гл. V, § 7—8, или Степанов, гл. V, § 3, или Бермант, II, гл. XIV, п° 203.

Пример 1. Найти общее решение неоднородного линейного уравнения

$$(3x + 2x^2) y'' - 6(x + 1) y' + 6y = 6,$$

если известно одно частное решение соответствующего однородного уравнения $y_1 = x + 1$.

Решение. Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$$(3x + 2x^2) y'' - 6(x + 1) y' + 6y = 0, \quad (*)$$

а затем методом вариации произвольных постоянных найдем общее решение данного неоднородного уравнения.

Чтобы написать общее решение уравнения (*), нужно знать два линейно независимых частных решения этого уравнения. Одно из них $y_1 = x + 1$ нам дано, второе будем искать в виде:

$$y_2 = u y_1 \text{ или } y_2 = u(x + 1).$$

Находим y_2' и y_2'' :

$$\begin{aligned} y_2' &= u'(x + 1) + u, \\ y_2'' &= u''(x + 1) + 2u'. \end{aligned}$$

Подставляя теперь значения y_2 , y_2' , y_2'' в уравнение (*), получим:

$$\begin{aligned} (3x + 2x^2)(u''x + u'' + 2u') - 6(x + 1)(u'x + u' + u) + \\ + 6u(x + 1) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 3x^2 u'' + 2x^3 u'' + 3xu'' + 2x^2 u'' + 6xu' + 4x^2 u' - \\ - 6x^2 u' - 6xu' - 6xu' - 6u' - 6xu - 6u + 6xu + 6u = 0. \end{aligned}$$

После приведения подобных окончательно будем иметь:

$$(2x^3 + 5x^2 + 3x)u'' + (-2x^2 - 6x - 6)u' = 0. \quad (**)$$

Уравнение (**) допускает понижение порядка, так как оно не содержит искомой функции u . Поэтому полагаем $u' = p$, тогда $u'' = p'$, и подставляем эти значения в (**):

$$(2x^3 + 5x^2 + 3x) p' - (2x^2 + 6x + 6)p = 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x^2 + 6x + 6}{2x^3 + 5x^2 + 3x} dx.$$

Далее:

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x^2 + 6x + 6}{2x^3 + 5x^2 + 3x} dx.$$

Чтобы найти интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{2x^2 + 6x + 6}{2x^3 + 5x^2 + 3x} = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x(2x + 3)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x + 3} + \frac{C}{x + 1}.$$

Откуда после приведения к общему знаменателю получим:

$$\begin{aligned} A(2x + 3)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(2x + 3) &\equiv \\ &\equiv 2x^2 + 6x + 6. \end{aligned}$$

Для отыскания коэффициентов A , B , C полагаем в этом тождестве $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1$:

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & 3A = 6, & A = 2 \\ x = -\frac{3}{2} & B\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{9}{2} - 9 + 6, & B = 2, \\ x = -1 & -C = 2 & C = -2. \end{array}$$

Итак,

$$\frac{2x^2 + 6x + 6}{2x^3 + 5x^2 + 3x} = \frac{2}{x} + \frac{2}{2x + 3} - \frac{2}{x + 1},$$

поэтому

$$\int \frac{dp}{p} = 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2 dx}{2x + 3} - 2 \int \frac{dx}{x + 1}.$$

Интегрируя, найдем:

$$\ln p = 2 \ln x + \ln(2x + 3) - 2 \ln(x + 1);$$

откуда

$$p = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}.$$

Произвольную слагаемую интегрирования мы положили равной нулю, так как нам нужно найти какое-нибудь частное решение. Но $p = u'$, поэтому

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2} dx = \int \left[2x - 1 + \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx = \\ &= x^2 - x - \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Здесь мы также положили произвольную слагаемую интегрирования равной нулю.

Так как $y_2 = uy_1$, то вторым искомым частным решением однородного дифференциального уравнения (*) будет:

$$\begin{aligned} y_2 &= uy_1 = \left(x^2 - x - \frac{1}{x+1} \right) (x+1) = \\ &= x^2(x+1) - x(x+1) - 1 = x^3 - (x+1). \end{aligned}$$

Таким образом, общим решением уравнения (*) будет:

$$\begin{aligned} y &= \bar{C}_1(x+1) + C_2[x^3 - (x+1)] = \\ &= (\bar{C}_1 - C_2)(x+1) + C_2x^3 = C_1(x+1) + C_2x^3 \end{aligned}$$

(здесь мы положили $\bar{C}_1 - C_2 = C_1$).

Частное решение заданного неоднородного уравнения найдем методом вариации произвольных постоянных, т. е. будем его искать в виде:

$$y = C_1(x)(x+1) + C_2(x)x^3.$$

Дифференцируя, получим:

$$y' = C_1'(x)(x+1) + C_1(x) + C_2'(x)x^3 + 3C_2(x)x^2.$$

Так как нам нужно выбрать две функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, то одно соотношение между ними мы можем выбрать произвольным, поэтому положим

$$C_1'(x)(x+1) + C_2'(x)x^3 = 0,$$

тогда

$$y' = C_1(x) + 3C_2(x)x^2.$$

Находим вторую производную:

$$y'' = C_1'(x) + 3C_2'(x)x^2 + 6C_2(x)x.$$

Подставляя эти значения y , y' , y'' в данное в условии задачи дифференциальное уравнение, найдем:

$$(3x + 2x^2) [C_1'(x) + 3C_2'(x)x^2 + 6C_2(x)x] - \\ - 6(x + 1)[C_1(x) + 3C_2(x)x^2] + \\ + 6[C_1(x)(x + 1) + C_2(x)x^3] = 6,$$

или

$$3xC_1'(x) + 2x^2C_1'(x) + 9x^3C_2'(x) + 6x^4C_2'(x) + \\ + 18x^2C_2(x) + 12x^3C_2(x) - 6xC_1(x) - 6C_1(x) - \\ - 18x^3C_2(x) - 18x^2C_2(x) + 6xC_1(x) + 6C_1(x) + \\ + 6x^3C_2(x) = 6.$$

После приведения подобных членов получим:

$$(3x + 2x^2)C_1'(x) + 3x^2(3x + 2x^2)C_2'(x) = 6.$$

Таким образом, для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ мы имеем два алгебраических уравнения *:

$$(x + 1)C_1'(x) + x^3C_2'(x) = 0,$$

$$C_1'(x) + 3x^2C_2'(x) = \frac{6}{3x + 2x^2}.$$

Решая эту систему относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, будем иметь:

$$C_1'(x) = \frac{-6}{(2x + 3)^2}, \quad C_2'(x) = \frac{6x + 6}{x^3(2x + 3)^2}.$$

Откуда

$$C_1(x) = - \int \frac{6}{(2x + 3)^2} dx = \frac{3}{2x + 3}, \\ C_2(x) = \int \frac{6x + 6}{x^3(2x + 3)^2} dx.$$

* Эту систему уравнений можно было бы написать сразу по формулам:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x); \end{cases}$$

для этого коэффициент при y'' у заданного уравнения следовало бы сделать равным единице. В нашем случае все члены уравнения следовало бы разделить на $3x + 2x^2$.

Чтобы найти последний интеграл, разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{6x + 6}{x^3 (2x + 3)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{(2x + 3)} + \frac{E}{(2x + 3)^2};$$

таким образом, имеем:

$$A x^2 (2x + 3)^2 + B x (2x + 3)^2 + C (2x + 3)^2 + D x^3 (2x + 3) + E x^3 \equiv 6x + 6.$$

Сравнивая в этом тождестве справа и слева коэффициенты при x^4 , x^2 , x , а также придавая x последовательно значения $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & 4A + 2D = 0, \\ x^2 & 9A + 12B + 4C = 0, \\ x & 9B + 12C = 6. \\ x = 0 & C = \frac{2}{3}, \\ x = -\frac{3}{2} & E = \frac{8}{9}. \end{array}$$

Решая ее, найдем:

$$A = 0, \quad B = -\frac{2}{9}, \quad C = \frac{2}{3}, \quad D = 0, \quad E = \frac{8}{9}.$$

Итак,

$$\frac{6x + 6}{x^3 (2x + 3)^2} = -\frac{2}{9x^2} + \frac{2}{3x^3} + \frac{8}{9(2x + 3)^2},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} C_2(x) &= \int \frac{6x + 6}{x^3 (2x + 3)^2} dx = \\ &= -\frac{2}{9} \int \frac{dx}{x^2} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3} + \frac{8}{9} \int \frac{dx}{(2x + 3)^2} = \\ &= \frac{2}{9x} - \frac{1}{3x^2} - \frac{4}{9(2x + 3)} = -\frac{1}{x^2(2x + 3)}. \end{aligned}$$

Произвольные постоянные интегрирования мы для простоты положили равными нулю

Таким образом, искомое частное решение неоднородного дифференциального уравнения равно:

$$\begin{aligned} Y &= C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 = \\ &= \frac{3}{2x+3} (x+1) - \frac{1}{x^2(2x+3)} x^3 = \\ &= \frac{3x+3-x}{2x+3} = \frac{2x+3}{2x+3} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение данного линейного неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + Y = C_1(x+1) + C_2 x^3 + 1.$$

195. Найти общее решение неоднородного линейного уравнения

$$y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{1}{x-1} y = x-1,$$

если известно, что $y_1 = e^x$ является частным решением соответствующего однородного уравнения.

§ 4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел III, гл. VI, § 1, или Степанов, гл. VI, § 1, п° 1, или Бермант, II, гл. XIV, п° 204.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Решение. Соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 + 3k + 2 = 0$$

имеет корни:

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -2.$$

Следовательно, частными решениями данного дифференциального уравнения будут:

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = e^{-2x}.$$

Эти решения линейно независимы, значит, общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 2.$$

Решение. Соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 + 4 = 0$$

имеет корни:

$$k_{1,2} = \pm 2i.$$

Линейно независимыми частными решениями, соответствующими этим корням, будут:

$$y_1 = \sin 2x \text{ и } y_2 = \cos 2x.$$

Поэтому общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

Теперь найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, для этого дифференцируем общее решение:

$$y' = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x$$

и в выражения для y и y' подставляем начальные условия:

$$1 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0,$$

$$2 = 2C_1 \cos 0 - 2C_2 \sin 0.$$

Откуда

$$C_2 = 1 \text{ и } C_1 = 1.$$

Таким образом, искомым частным решением будет:

$$y = \sin 2x + \cos 2x.$$

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Решение. Соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 5 = 0$$

имеет корни:

$$k_{1,2} = 2 \pm i.$$

Линейно независимыми частными решениями данного уравнения будут:

$$y_1 = e^{2x} \sin x \text{ и } y_2 = e^{2x} \cos x.$$

Таким образом, общим решением данного уравнения будет:

$$y = e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Решение. Соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

имеет 2 кратных корня:

$$k_{1,2} = -3.$$

Так как $k_{1,2} = -3$ является корнем характеристического уравнения кратности 2, то ему соответствуют два линейно независимых частных решения:

$$y_1 = e^{-3x} \text{ и } y_2 = x e^{-3x}.$$

Значит, общим решением данного уравнения будет:

$$y = e^{-3x} (C_1 + C_2 x).$$

Пример 5. Груз весом P подвешен на вертикальной пружине, длина которой в ненагруженном состоянии равна l . Найти закон движения груза, пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха.

Решение. Примем за ось Oy ось, проходящую через точку подвеса груза, направленную вертикально вверх, а за начало координат — точку O положения равновесия груза, т. е. такую точку, в которой вес груза уравновешивается силой реакции пружины (рис. 19).

Пусть λ означает удлинение пружины в момент времени t , а $\lambda_{ст}$ — статическое удлинение пружины, т. е.

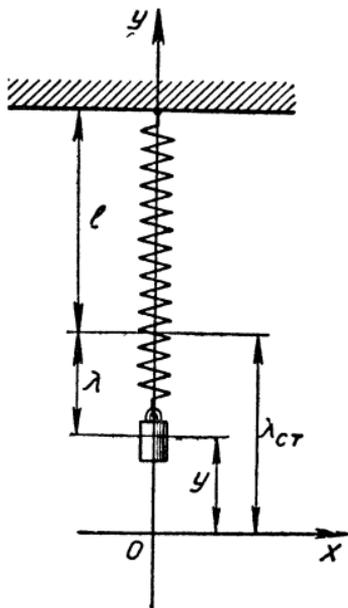


Рис. 19.

расстояние от конца нерастянутой пружины до положения равновесия. Тогда

$$\lambda = \lambda_{\text{ст}} - y \text{ или } \lambda_{\text{ст}} - \lambda = y.$$

Дифференциальное уравнение получится из второго закона Ньютона $F = ma$, где $m = \frac{P}{g}$ — масса груза, а $a = \frac{d^2y}{dt^2}$ — ускорение движения, F — действующая сила.

В данном случае действующая на груз сила складывается из силы натяжения пружины и силы тяжести. По закону Гука сила натяжения пружины пропорциональна ее удлинению, т. е. равна $c\lambda$, где c — постоянный коэффициент жесткости. Сила натяжения пружины направлена вертикально вверх, а сила тяжести P действует в отрицательном направлении, поэтому уравнение движения будет иметь вид:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = c\lambda - P.$$

Так как в положении равновесия сила натяжения пружины уравновешивается весом, то $P = c\lambda_{\text{ст}}$, поэтому

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = c\lambda - c\lambda_{\text{ст}},$$

или

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -c(\lambda_{\text{ст}} - \lambda),$$

или, так как $\lambda_{\text{ст}} - \lambda = y$,

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -cy.$$

Обозначив $\frac{c}{m} = \omega^2$, окончательно будем иметь:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \quad (*)$$

Полученное уравнение (*) является уравнением свободных колебаний и представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение

$$k^2 + \omega^2 = 0$$

имеет корни: $k_{1,2} = \pm i\omega$, им соответствуют линейно независимые частные решения:

$$y_1 = \cos \omega t, \quad y_2 = \sin \omega t.$$

Таким образом, общим решением уравнения (*) будет:

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (**)$$

Для выяснения физического смысла движения удобнее другая форма записи решения, к которой легко перейти, введя новые произвольные постоянные. Умножив и разделив (**) на $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, получим:

$$y = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \omega t \right).$$

Теперь положим

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A, \quad \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos \varphi,$$

тогда решение запишется в виде

$$y = A (\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t),$$

или

$$y = A \sin (\omega t + \varphi).$$

Величина A называется *амплитудой колебания*, аргумент $\omega t + \varphi$ — *фазой колебания*, значение фазы при $t = 0$, т. е. величина φ — *начальной фазой*, величина $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ — *частотой колебания*.

В задачах 196—202 проинтегрировать данные дифференциальные уравнения.

196. $y'' - y' - 6y = 0$; найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y|_{x=0} = 3, \quad y'|_{x=0} = -6.$$

197. $y'' + 2y' + 10y = 0.$

198. $y'' + 16y = 0.$

199. $y'' - 2y + y = 0.$

200. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$

201. $y'' + 4y' = 0$; найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y|_{x=0} = 7, \quad y'|_{x=0} = 8$$

202. $y'' - 4y' + 8y = 0$; найти частное решение удовлетворяющее начальным условиям:

$$y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 2.$$

203. Груз весом P подвешен на вертикальной пружине, длина которой в ненагруженном состоянии равна l . Найти закон движения груза, пренебрегая массой пружины с учетом сопротивления среды, величина которой пропорциональна скорости движения.

§ 5. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Предварительно изучите по учебнику: Фролов, 2, раздел III, гл. VI, § 2, 3, или Степанов, гл. VI, § 1, п° 2, или Бермант, II, гл. XIV, п°п° 205, 207.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}.$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Корни его характеристического уравнения

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

равны

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2.$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения будет:

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Общее решение данного неоднородного уравнения можно было бы найти методом вариации произвольных постоянных. Однако в этой задаче проще подобрать частное решение неоднородного уравнения, которое в сумме с общим решением соответствующего однородного уравнения даст общее решение неоднородного уравнения.

Так как в правой части данного уравнения стоит произведение многочлена второй степени $x^2 + x$ на e^{3x} , то частное решение неоднородного уравнения будем искать

в том же виде, т. е. в виде произведения многочлена второй степени на e^{3x} , а именно:

$$y_1 = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}. \quad (*)$$

Чтобы найти коэффициенты A , B , C , дважды дифференцируем (*):

$$\begin{aligned} y_1' &= (2Ax + B)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx + C)e^{3x}, \\ y_1'' &= 2Ae^{3x} + 3(2Ax + B)e^{3x} + 3(2Ax + B)e^{3x} + \\ &\quad + 9(Ax^2 + Bx + C)e^{3x}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения y_1 , y_1' , y_1'' в данное дифференциальное уравнение, получим тождество:

$$\begin{aligned} 2Ae^{3x} + 6(2Ax + B)e^{3x} + 9(Ax^2 + Bx + C)e^{3x} - \\ - 3(2Ax + B)e^{3x} - 9(Ax^2 + Bx + C)e^{3x} + \\ + 2(Ax^2 + Bx + C)e^{3x} \equiv (x^2 + x)e^{3x}, \end{aligned}$$

которое после сокращения на e^{3x} и приведения подобных примет вид:

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) \equiv x^2 + x,$$

или

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) \equiv x^2 + x. \quad (**)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях (**), слева и справа, будем иметь:

$$2A = 1, \quad 6A + 2B = 1, \quad 2A + 3B + 2C = 0,$$

откуда найдем:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -1, \quad C = 1.$$

Таким образом, искомым частным решением будет:

$$y_1 = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)e^{3x} = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x},$$

и общим решением данного неоднородного уравнения будет:

$$y = Y + y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x}.$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}.$$

Решение. Пишем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Его корни равны

$$k_1 = k_2 = 1.$$

следовательно, общим решением соответствующего однородного уравнения будет:

$$Y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Для отыскания частного решения заданного неоднородного уравнения рассмотрим два уравнения:

$$y'' - 2y' + y = \sin x \quad (*)$$

и

$$y'' - 2y' + y = e^{-x} \quad (**)$$

и найдем частное решение каждого из них. Сумма этих частных решений будет частным решением заданного дифференциального уравнения.

Так как в правой части уравнения (*) стоит $\sin x$, то частное решение его будем искать в виде линейной комбинации $\sin x$ и $\cos x$, а именно положим

$$y_1 = A \sin x + B \cos x,$$

тогда

$$y_1' = A \cos x - B \sin x,$$

$$y_1'' = -A \sin x - B \cos x.$$

Подставляя эти значения y_1 , y_1' , y_1'' в уравнение (*), получим тождество:

$$-A \sin x - B \cos x - 2A \cos x + 2B \sin x + A \sin x + B \cos x \equiv \sin x,$$

или

$$-2A \cos x + 2B \sin x \equiv \sin x.$$

Сравнивая коэффициенты при синусах и косинусах в левой и правой части тождества, будем иметь:

$$-2A = 0, \quad 2B = 1 \quad \text{или} \quad B = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, частным решением уравнения (*) будет:

$$y_1 = \frac{1}{2} \cos x.$$

Теперь ищем частное решение уравнения (**). Так как в ее правой части стоит функция e^{-x} , то и решение ищем в виде

$$y_2 = Ae^{-x},$$

тогда

$$y_2' = -Ae^{-x}, \quad y_2'' = Ae^{-x}.$$

Подставляя эти значения y_2 , y_2' и y_2'' в уравнение (**), получим тождество:

$$Ae^{-x} + 2Ae^{-x} + Ae^{-x} \equiv e^{-x},$$

или

$$4Ae^{-x} \equiv e^{-x},$$

откуда

$$4A = 1, \quad \text{или} \quad A = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, частным решением уравнения (**) будет:

$$y_2 = \frac{1}{4} e^{-x}.$$

Таким образом, частным решением заданного дифференциального уравнения будет:

$$y_3 = y_1 + y_2 = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} e^{-x},$$

и его общим решением будет:

$$y = Y + y_3 = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} e^{-x}.$$

Замечание. Частное решение данного дифференциального уравнения можно было сразу искать в виде

$$y_1 = A \sin x + B \cos x + De^{-x}.$$

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 5y' + 6y = -5e^{-2x}.$$

Решение. Пишем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 5k + 6 = 0,$$

его корни равны соответственно:

$$k_1 = -2, \quad k_2 = -3.$$

Следовательно, общим решением соответствующего однородного уравнения будет:

$$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Частное решение заданного неоднородного линейного дифференциального уравнения следовало бы искать в виде Ae^{-2x} , однако выражение $C_1 e^{-2x}$ входит в общее решение соответствующего однородного уравнения, следовательно, при любом значении постоянного A функция Ae^{-2x} обратит левую часть данного уравнения в нуль (здесь корень характеристического уравнения $k_1 = -2$, кратность которого равна 1, совпал с коэффициентом при x в показателе степени e). Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_1 = Axe^{-2x}$$

(т. е. умножаем Ae^{-2x} на x , см. учебник).

Дифференцируем:

$$\begin{aligned} y_1' &= Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}, \\ y_1'' &= -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x}. \end{aligned}$$

Подставляем y_2, y_2', y_2'' в заданное уравнение:

$$\begin{aligned} -4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} + 5Ae^{-2x} - 10Axe^{-2x} + \\ + 6Axe^{-2x} = -5e^{-2x}, \end{aligned}$$

или

$$Ae^{-2x} = -5e^{-2x},$$

следовательно,

$$A = -5 \text{ и } y_1 = -5xe^{-2x}.$$

Таким образом, общим решением данного уравнения будет:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} - 5xe^{-2x}.$$

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' + 4y' = 4 \sin 2x + x^2.$$

Решение. Пишем характеристическое уравнение:

$$k^3 + 4k = 0;$$

его корни равны:

$$k_1 = 0, \quad k_{2,3} = \pm 2i.$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения будет:

$$Y = C_1 + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x.$$

Для отыскания частного решения рассмотрим два уравнения:

$$y''' + 4y' = 4 \sin 2x \quad (*)$$

и

$$y''' + 4y' = x^2. \quad (**)$$

Частное решение уравнения (*) будем искать в виде линейной комбинации $\sin 2x$ и $\cos 2x$, умноженной на x , так как корень характеристического уравнения $k = \pm 2i$ совпал с коэффициентом при x в показателе степени e (ведь $\sin 2x = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}$).

А именно, положим

$$y_1 = x(A \sin 2x + B \cos 2x).$$

Дифференцируем:

$$y_1' = A \sin 2x + B \cos 2x + x(2A \cos 2x - 2B \sin 2x).$$

$$\begin{aligned} y_1'' &= 2A \cos 2x - 2B \sin 2x + 2A \cos 2x - 2B \sin 2x + \\ &+ x(-4A \sin 2x - 4B \cos 2x) = \\ &= 4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 4x(A \sin 2x + B \cos 2x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1''' &= -8A \sin 2x - 8B \cos 2x - 4A \sin 2x - 4B \cos 2x - \\ &- 4x(2A \cos 2x - 2B \sin 2x) = \\ &= -12A \sin 2x - 12B \cos 2x - 8x(A \cos 2x - B \sin 2x). \end{aligned}$$

Найденные значения y_1''' и y_1' подставляем в (*):

$$\begin{aligned} &-12A \sin 2x - 12B \cos 2x - 8x(A \cos 2x - B \sin 2x) + \\ &+ 4A \sin 2x + 4B \cos 2x + 8x(A \cos 2x - B \sin 2x) \equiv \\ &\equiv 4 \sin 2x \end{aligned}$$

или

$$-8A \sin 2x - 8B \cos 2x \equiv 4 \sin 2x.$$

Откуда

$$-8A = 4, \quad -8B = 0$$

и

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0.$$

Следовательно,

$$y_1 = -\frac{1}{2} x \sin 2x.$$

Так как в правой части (***) стоит многочлен 2-й степени (x^2 можно считать многочленом 2-й степени), то частное решение уравнения (***) будем искать в виде многочлена 2-й степени, умноженного на x , так как корень характеристического уравнения $k = 0$ совпал с коэффициентом при x в показателе степени e (можно считать, что x^2 умножен на e^{0x}), т. е. положим

$$y_2 = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Дифференцируем:

$$y_2' = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y_2'' = 6Ax + 2B.$$

$$y_2''' = 6A.$$

Найденные значения y_2'' и y_2' подставляем в (***):

$$6A + 12Ax^2 + 8Bx + 4C \equiv x^2,$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , будем иметь:

$$12A = 1, \quad 8B = 0, \quad 6A + 4C = 0,$$

откуда

$$A = \frac{1}{12}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{8}.$$

Следовательно, частным решением уравнения (***) будет:

$$y_2 = \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{8} x.$$

Таким образом, частное решение заданного дифференциального уравнения равно:

$$y_3 = y_1 + y_2 = -\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{8} x,$$

а общее его решение имеет вид:

$$y = Y + y_3 = \\ = C_1 + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x - \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{8} x.$$

Пример 5. Найти общее решение дифференциально-го уравнения:

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

Решение. Пишем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 5 = 0.$$

его корни $k_{1,2} = 2 \pm i$.

Общим решением соответствующего однородного уравнения будет:

$$Y = (C_1 \sin x + C_2 \cos x) e^{2x}. \quad (*)$$

Примененный нами в предыдущих примерах метод подбора частного решения здесь непригоден, так как правая часть представляет собой дробную функцию от e^{2x} и $\cos x$ (частное решение можно подобрать в том виде, в каком записана правая часть только тогда, когда последняя имеет вид: $P_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$ или $P_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x$, где $P_m(x)$ — многочлен m -й степени). Поэтому нам остается лишь воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Итак, будем искать частное решение заданного неоднородного уравнения в виде (*), где C_1 и C_2 — функции от x , которые нам следует определить.

Дифференцируем Y :

$$Y' = 2e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + \\ + e^{2x} (C_1' \sin x + C_1 \cos x + C_2' \cos x - C_2 \sin x);$$

полагаем

$$C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0, \quad (**)$$

тогда

$$Y' = 2e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + e^{2x} (C_1 \cos x - C_2 \sin x).$$

Далее:

$$\begin{aligned} Y'' &= 4e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + \\ &+ 2e^{2x} (C_1' \sin x + C_1 \cos x + C_2' \cos x - C_2 \sin x) + \\ &+ 2e^{2x} (C_1 \cos x - C_2 \sin x) + \\ &+ e^{2x} (C_1' \cos x - C_1 \sin x - C_2' \sin x - C_2 \cos x) = \\ &= 4e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + 4e^{2x} (C_1 \cos x - C_2 \sin x) - \\ &- e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + e^{2x} (C_1' \cos x - C_2' \sin x) = \\ &= 3e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + 4e^{2x} (C_1 \cos x - C_2 \sin x) + \\ &+ e^{2x} (C_1' \cos x - C_2' \sin x). \end{aligned}$$

В преобразовании мы воспользовались тем, что $C_1' \sin x + C_1 \cos x = 0$. Подставляем эти значения y , y' и y'' в заданное уравнение:

$$\begin{aligned} &3e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + 4e^{2x} (C_1 \cos x - C_2 \sin x) + \\ &+ e^{2x} (C_1' \cos x - C_2' \sin x) - 8e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x) - \\ &- 4e^{2x} (C_1 \cos x - C_2 \sin x) + 5e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x) = \frac{e^{2x}}{\cos x}. \end{aligned}$$

После приведения подобных и сокращения на e^{2x} будем иметь:

$$C_1' \cos x - C_2' \sin x = \frac{1}{\cos x}.$$

Присоединяем условие (**), которое мы сами наложили на функции C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} C_1' \sin x + C_2' \cos x &= 0, \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x &= \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно C_1' и C_2' , получим:

$$C_1' = 1, \quad C_2' = -\operatorname{tg} x,$$

откуда

$$C_1(x) = x, \quad C_2(x) = \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \cos x.$$

Искомое частное решение имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= [C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x] e^{2x} = \\ &= (x \sin x - \cos x \ln \cos x) e^{2x}. \end{aligned}$$

Таким образом, общим решением заданного дифференциального уравнения будет:

$$y = Y + y_1 = \\ = (C_1 \sin x + C_2 \cos x + x \sin x - \cos x \ln \cos x) e^{2x}.$$

В задачах 204—211 проинтегрировать данные дифференциальные уравнения.

204. $y'' + y = x + 2e^x.$

205. $y'' - 2y' = x^2 - x.$

206. $y'' + 9y = 3 \cos 3x.$

207. $y'' + 2y' + y = e^x.$

208. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x + xe^{-x}.$

209. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$; найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 3,2.$$

210. $y'' - 2y' = e^x (x^2 + x - 3)$; найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y|_{x=0} = 2, \quad y'|_{x=0} = 2.$$

211. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}.$

212. Груз весом P подвешен на вертикальной пружине, длина которой в ненагруженном состоянии равна l . На груз действует периодическая сила $Q_1 \sin \Omega t$, где Q_1 и Ω — постоянные. Найти закон движения груза, пренебрегая массой пружины и сопротивлением среды (см. § 4, пример 5).

213. Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω около перпендикулярной к ней вертикальной оси. Шарик, находящийся внутри трубки, скользит по ней без трения. Найти закон движения шарика относительно трубки, считая, что

а) в начальный момент шарик находился на расстоянии a от оси вращения; начальная скорость шарика равна нулю;

б) в начальный момент шарик находился на оси вращения и имел начальную скорость v_0 .

У к а з а н и е . Так как нам нужно найти закон движения относительно трубки, то можно считать, что трубка неподвижна (выбрана подвижная система координат, связанная с трубкой), а на шарик действует сила $m\omega^2 r$ (r — расстояние от оси вращения до шарика).

§ 6. Дополнительные задачи к главе II

Уравнение Эйлера. Уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + A_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} x y' + A_n y = f(x), \quad (*)$$

где A_1, A_2, \dots, A_n — постоянные, называется *уравнением Эйлера*. Введением новой независимой переменной $t = \ln x$, или, что то же самое, $x = e^t$, оно преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами, которое интегрируется обычными методами.

Пример 1. Найти общее решение уравнения:

$$x^2 y'' + x y' + y = x.$$

Решение. Заданное уравнение есть уравнение Эйлера, поэтому для его интегрирования введем новую независимую переменную:

$$t = \ln x, \text{ или } x = e^t.$$

Далее, переходим в производных к новому аргументу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}, \text{ но } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t},$$

поэтому $\frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} = \left(-e^{-t} \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) e^{-t} = \\ &= e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned}$$

Подставляем в заданное уравнение вместо x, y', y'' их новые значения, получим:

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + e^t \cdot e^{-t} \frac{dy}{dt} + y = e^t$$

или после приведения подобных:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = e^t.$$

Мы получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения:

$$k^2 + 1 = 0,$$

его корни:

$$k_{1,2} = \pm i,$$

и общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$Y = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_1 = Ae^t, \text{ тогда } y_1' = Ae^t, \ y_1'' = Ae^t.$$

Подставляем эти значения y и y'' в уравнение:

$$Ae^t + Ae^t = e^t,$$

откуда

$$A = \frac{1}{2}$$

и частным решением будет:

$$y_1 = \frac{1}{2} e^t.$$

Следовательно, общим решением промежуточного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами будет:

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + e^t.$$

Возвращаясь к независимой переменной x , будем иметь общее решение заданного уравнения Эйлера:

$$y = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x + x.$$

Замечание 1. Частные решения однородного уравнения Эйлера можно искать в виде x^k . Подставив эту функцию в однородное уравнение Эйлера, получим характеристическое уравнение, степень которого будет равна порядку уравнения. Каждому действительному корню k_m будет соответствовать частное решение x^{k_m} , каждому мнимому корню $k = \alpha + \beta i$ будет соответствовать два линейно независимых решения: $x^\alpha \sin \beta \ln x$, $x^\alpha \cos \beta \ln x$.

В случае действительных кратных корней соответствующими линейно независимыми частными решениями будут:

$$x^{k_m}, \ x^{k_m} \ln x, \ x^{k_m} \ln^2 x, \dots$$

То же относится и к кратным мнимым корням.

Пример 2. Найти общее решение уравнения:

$$x^2 y'' - xy' - 3y = 0.$$

Решение. Частное решение ищем в виде $y = x^k$.
Дифференцируем:

$$y' = kx^{k-1}, \quad y'' = k(k-1)x^{k-2}.$$

Подставляем эти значения y , y' , y'' в данное уравнение, имеем:

$$k(k-1)x^k - kx^k - 3x^k = 0,$$

или, сокращая на x^k , получим характеристическое уравнение:

$$k(k-1) - k - 3 = 0,$$

или

$$k^2 - 2k - 3 = 0.$$

Его корни равны: $k_1 = 3$, $k_2 = -1$.

Следовательно, линейно независимыми решениями заданного уравнения будут:

$$y_1 = x^3 \text{ и } y_2 = x^{-1}.$$

Таким образом, общим решением данного уравнения Эйлера будет:

$$y = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x}.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения:

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0.$$

Решение. Сразу пишем характеристическое уравнение (имея в виду, что частное решение уравнения ищем в виде x^k):

$$k(k-1) + 3k + 1 = 0,$$

или

$$k^2 + 2k + 1 = 0,$$

Корни характеристического уравнения равны:

$$k_{1,2} = -1.$$

Соответствующие им линейно независимые частные решения запишутся в виде:

$$y_1 = x^{-1} \text{ и } y_2 = x^{-1} \ln x.$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2 \ln x}{x}.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения:

$$x^2 y'' + xy' + 4y = 0.$$

Решение. Пишем характеристическое уравнение:

$$k(k-1) + k + 4 = 0,$$

или

$$k^2 + 4 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 2i.$$

Линейно независимыми решениями, соответствующими этим корням характеристического уравнения, будут:

$$y_1 = \cos(2 \ln x), \quad y_2 = \sin(2 \ln x).$$

Следовательно, общим решением будет:

$$y = C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \sin(2 \ln x).$$

Замечание 2. При решении неоднородного уравнения Эйлера следует сперва найти общее решение соответствующего однородного уравнения. Для разыскания частного решения неоднородного уравнения следует в общем случае воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Однако если правая часть уравнения имеет вид:

$$x^r, \quad P_m(\ln x) \text{ или } x^r P_m(\ln x),$$

где $P_m(\ln x)$ означает многочлен m -й степени относительно $\ln x$, то частное решение ищем в виде:

$$Ax^r, \quad Q_m(\ln x), \quad x^r Q_m(\ln x).$$

($Q_m(\ln x)$ — многочлен m -й степени относительно $\ln x$, коэффициенты определяются из подстановки этих выражений в уравнение).

Пример 5. Найти общее решение уравнения:

$$x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^3.$$

Решение. Сперва находим общее решение соответствующего однородного уравнения. Для этого выписываем характеристическое уравнение:

$$k(k-1)(k-2) - k(k-1) + 2k - 2 = 0,$$

или

$$\begin{aligned}k^3 - k^2 - 2k^2 + 2k - k^2 + k + 2k - 2 &= 0, \\k^3 - 4k^2 + 5k - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Производим разложение на множители:

$$\begin{aligned}(k^3 - k^2) - (3k^2 - 3k) + 2k - 2 &= 0, \\k^2(k - 1) - 3k(k - 1) + 2(k - 1) &= 0, \\(k - 1)(k^2 - 3k + 2) &= 0,\end{aligned}$$

откуда

$$k_{1,2} = 1, \quad k_3 = 2.$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения будет:

$$Y = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x^2.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y_1 = Ax^3.$$

Дифференцируем:

$$y_1' = 3Ax^2, \quad y_1'' = 6Ax, \quad y_1''' = 6A.$$

Эти значения y_1, y_1', y_1'', y_1''' подставляем в заданное уравнение; будем иметь:

$$6Ax^3 - 6Ax^3 + 6Ax^3 - 2Ax^3 \equiv x^3,$$

или

$$4Ax^3 \equiv x^3,$$

откуда

$$4A = 1, \quad A = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, искомое частное решение неоднородного уравнения будет:

$$y_1 = \frac{1}{4} x^3.$$

Общее решение заданного уравнения запишется в виде:

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x^2 + \frac{1}{4} x^3.$$

В задачах 214—218 проинтегрировать уравнения Эйлера.

214. $x^2 y'' + xy' - y = 0.$

215. $x^3 y''' + xy' - y = 0.$

$$216. y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0.$$

$$217. x^2 y'' - 4xy' + 6y = x.$$

218. $x^2 y'' - xy' + y = 2x$; найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 0$, $y' = 1$, при $x = 0$.

Системы дифференциальных уравнений. Нормальная система двух дифференциальных уравнений с двумя искомыми функциями имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= g(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Для отыскания решений этой системы можно пользоваться *методом исключения*, который заключается в следующем: дифференцируем по x одно из уравнений (например, первое):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}$$

и, подставив вместо $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ их значения, получим:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f + \frac{\partial f}{\partial z} g. \quad (**)$$

Определив z из первого уравнения системы (*) и подставив найденное значение во второе уравнение, а затем в уравнение (**), получим уравнение 2-го порядка с одной неизвестной функцией.

Пример 1. Проинтегрировать систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} + 2y + z &= \sin x, \\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z &= \cos x. \end{aligned} \right.$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение по x :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = \cos x. \quad (***)$$

Из первого уравнения определяем z :

$$z = \sin x - 2y - \frac{dy}{dx}. \quad (****)$$

Подставив это значение z во второе уравнение, получим:

$$\frac{dz}{dx} - 4y - 2 \sin x + 4y + 2 \frac{dy}{dx} = \cos x,$$

или

$$\frac{dz}{dx} = \cos x + 2 \sin x - 2 \frac{dy}{dx}.$$

Подставляем найденное значение $\frac{dz}{dx}$ в уравнение (***):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + \cos x + 2 \sin x - 2 \frac{dy}{dx} = \cos x,$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2 \sin x.$$

Это уравнение второго порядка интегрируется непосредственно:

$$\frac{dy}{dx} = -2 \int \sin x dx = 2 \cos x + C_1.$$

Интегрируя еще раз, получим:

$$y = 2 \int \cos x dx + C_1 \int dx = 2 \sin x + C_1 x + C_2.$$

Подставляя y и y' в равенство (****), получим:

$$\begin{aligned} z &= \sin x - 4 \sin x - 2C_1 x - 2C_2 - 2 \cos x - C_1 = \\ &= -3 \sin x - 2 \cos x - 2C_1 x - C_1 - 2C_2. \end{aligned}$$

Итак, решениями системы будут функции:

$$\begin{aligned} y &= 2 \sin x + C_1 x + C_2, \\ z &= -3 \sin x - 2 \cos x - 2C_1 x - C_1 - 2C_2. \end{aligned}$$

Пример 2. Вещество A разлагается на два вещества P и Q со скоростью образования каждого из них, пропорциональной количеству неразложившегося вещества. Найти закон изменения количеств x и y веществ P и Q в зависимости от времени t , если при $t = 0$ $x = y = 0$, а через час x и y равны соответственно $\frac{a}{8}$ и $\frac{3a}{8}$, где a — первоначальное количество вещества A .

Решение. В момент времени t количество вещества A равно $a - x - y$, следовательно, для установления за-

кона изменения количеств веществ Q и P мы имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= k_1(a - x - y), \\ \frac{dy}{dt} &= k_2(a - x - y).\end{aligned}$$

Можно было бы при решении этой системы воспользоваться общим методом исключения, однако здесь проще разделить обе части второго уравнения на соответствующие части первого; получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2}{k_1},$$

откуда

$$y = \frac{k_2}{k_1} x + C.$$

Так как при $t = 0$ имеем $x = y = 0$, то $C = 0$ и поэтому

$$y = \frac{k_2}{k_1} x.$$

Заменив в первом уравнении y через $\frac{k_2}{k_1} x$, получим:

$$\frac{dx}{dt} + (k_1 + k_2)x = k_1 a.$$

Это — линейное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения

$$k + (k_1 + k_2) = 0$$

имеет корень:

$$k = -(k_1 + k_2).$$

Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения будет:

$$X = C_1 e^{-(k_1 + k_2)t}.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$x_1 = A, \text{ тогда } x_1' = 0$$

и

$$(k_1 + k_2)A = k_1 a, \quad A = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2}.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2},$$

и общее решение этого линейного неоднородного уравнения имеет вид:

$$x = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2} + C_1 e^{-(k_1 + k_2)t}.$$

Используя начальное условие $x = 0$ при $t = 0$, будем иметь:

$$C_1 = -\frac{k_1 a}{k_1 + k_2}$$

и, следовательно,

$$x = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2} \left[1 - e^{-(k_1 + k_2)t} \right].$$

Подставим это выражение для x в равенство:

$$y = \frac{k_2}{k_1} x,$$

получим:

$$y = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2} \left[1 - e^{-(k_1 + k_2)t} \right].$$

Примем за единицу времени час, тогда, зная, что $x = \frac{a}{8}$, $y = \frac{3a}{8}$ при $t = 1$, составляем систему уравнений

для определения коэффициентов k_1 и k_2 (сокращаем сразу на a):

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} &= \frac{k_1}{k_1 + k_2} \left[1 - e^{-(k_1 + k_2)} \right], \\ \frac{3}{8} &= \frac{k_2}{k_1 + k_2} \left[1 - e^{-(k_1 + k_2)} \right]. \end{aligned}$$

Сложив соответствующие части обоих уравнений, получим: $\frac{1}{2} = 1 - e^{-(k_1 + k_2)}$, откуда $e^{-(k_1 + k_2)} = 2^{-1}$

и

$$k_1 + k_2 = \ln 2.$$

Разделив обе части второго уравнения на соответствующие части первого, получим:

$$k_2 = 3k_1.$$

Таким образом,

$$k_1 = \frac{1}{4} \ln 2, \quad k_2 = \frac{3}{4} \ln 2.$$

Искомое решение запишется в виде:

$$x = \frac{a}{4} \left[1 - (e^{\ln 2})^{-t} \right] = \frac{a}{4} (1 - 2^{-t}),$$
$$y = \frac{3a}{4} (1 - 2^{-t}).$$

В задачах 219—222 проинтегрировать системы уравнений.

$$219. \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 5z, \\ \frac{dz}{dx} + y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$220. \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -3y - z, \\ \frac{dz}{dx} = y - z. \end{cases}$$

$$221. \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + 3y + 4z = 2x, \\ \frac{dz}{dx} - y - z = x; \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{найти частные решения, удо-} \\ \text{влетворяющие начальным ус-} \\ \text{ловиям } y = 0, z = 0 \text{ при } x = 0. \end{array}$$

$$222. \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

223. Снаряд вылетает из орудия с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти уравнение движения снаряда, принимая сопротивление воздуха пропорциональным скорости.

Указание. Разложить скорость на горизонтальную и вертикальную составляющие: v_x и v_y . Составить уравнения, считая искомыми функциями v_x и v_y , затем, проинтегрировав по t , получить x и y .

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов. Если интегрирование дифференциального уравнения при помощи элементарных функций не удастся, то его решение в ряде случаев можно

искать в виде степенного ряда (см. Степанов, гл. VI, § 2, 2):

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (*)$$

Коэффициенты a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) находят путем подстановки ряда (*) в уравнение и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях бинома.

Пример 1. Найти в виде степенного ряда решение уравнения

$$y'' + xy = 0$$

при начальных условиях: $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$.

Решение. Из начальных условий следует, что решение требуется найти в окрестности точки $x = 0$, поэтому будем искать его в виде:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Ряд почленно дифференцируем:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots,$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots$$

Подставляя y и y'' , выраженные через их ряды, в данное уравнение, приходим к тождеству:

$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + (n+1)n a_{n+1}x^{n-1} + \\ + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \dots + x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + \\ + a_nx^n + \dots) \equiv 0.$$

Собирая в левой части полученного равенства коэффициенты при одинаковых степенях x и приравнявая нулю коэффициенты при этих степенях, будем иметь:

$$2a_2 = 0, \quad a_2 = 0;$$

$$3 \cdot 2a_3 + a_0 = 0, \quad a_3 = -\frac{a_0}{2 \cdot 3};$$

$$4 \cdot 3a_4 + a_1 = 0, \quad a_4 = -\frac{a_1}{3 \cdot 4};$$

$$5 \cdot 4a_5 + a_2 = 0, \quad a_5 = -\frac{a_2}{4 \cdot 5} = 0;$$

$$6 \cdot 5a_6 + a_3 = 0, \quad a_6 = -\frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6};$$

$$7.6a_7 + a_4 = 0, \quad a_7 = -\frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7};$$

$$8.7a_8 + a_5 = 0, \quad a_8 = -\frac{a_5}{8 \cdot 7} = 0;$$

.....

$$a_{3k} = \frac{(-1)^k a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-1) 3k};$$

$$a_{3k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots 3k (3k+1)};$$

$$a_{3k+2} = 0;$$

.....

Следовательно,

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \dots + \right. \\ \left. + (-1)^k \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-1) 3k} + \dots \right) + \\ + a_1 \left(x - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \dots + \right. \\ \left. + (-1)^k \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots 3k (3k+1)} + \dots \right).$$

Мы получили общее решение заданного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, роль произвольных постоянных выполняют a_0 и a_1 . По признаку Даламбера легко установить, что ряд сходится при $-\infty < x < +\infty$.

Используя начальные условия, найдем частное решение. Для этого вернемся к первоначальной записи в виде ряда искомой функции и ее производной:

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots, \\ y' = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

Так как $y = 1$, и $y' = 0$ при $x = 0$, то $1 = a_0$, $0 = a_1$, и поэтому искомое частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид:

$$y = 1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \dots + \\ + (-1)^k \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-1) 3k} + \dots$$

Можно было бы сразу использовать начальные условия и, исходя из этого, определять коэффициенты ряда, тогда мы сразу получили бы частное решение.

Иногда бывает проще искать частное решение дифференциального уравнения в форме ряда Тейлора:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

где производные $y^{(n)}(x_0)$ находятся при помощи последовательного дифференцирования заданного дифференциального уравнения и подстановки вместо x чисел x_0 .

Пример 2. Найти в виде степенного ряда решение уравнения

$$y' = 2y + x - 1,$$

удовлетворяющее начальному условию: $y = 2$ при $x = 1$.

Решение. Частное решение будем искать в виде:

$$y = y(1) + y'(1)(x - 1) + \frac{y''(1)}{2!} (x - 1)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!} (x - 1)^n + \dots \quad (*)$$

Из начальных условий следует, что $y(1) = 2$. Из заданного уравнения, подставляя в него значения $x = 1$, $y = 2$, находим: $y'(1) = 4$. Далее, дифференцируем заданное уравнение по x , имеем:

$$y'' = 2y' + 1, \text{ откуда } y''(1) = 8 + 1 = 9.$$

Далее,

$$\begin{aligned} y''' &= 2y'', & y'''(1) &= 9 \cdot 2; \\ y^{IV} &= 2y''', & y^{IV}(1) &= 9 \cdot 2^2; \\ &\dots & & \dots \\ y^{(n)} &= 2y^{(n-1)}, & y^{(n)}(1) &= 9 \cdot 2^{n-2}; \\ &\dots & & \dots \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения $y(1)$, $y'(1)$, \dots , $y^{(n)}(1)$, \dots в (*), получим частное решение:

$$y = 2 + 4(x - 1) + \frac{9}{2!} (x - 1)^2 + \frac{9 \cdot 2}{3!} (x - 1)^3 + \dots \\ \dots + \frac{9 \cdot 2^{n-2}}{n!} (x - 1)^n + \dots$$

Используя признак Даламбера, устанавливаем, что этот ряд сходится при $-\infty < x < \infty$.

Пример 3. Найти первые двенадцать членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y'' + yy' - 2 = 0,$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$y = 0, y' = 0$ при $x = 0$. Вычислить $\int_0^1 y dx$ с точностью до 0,001. Вычислить $y'|_{x=0,5}$ с точностью до 0,00001.

Решение. Частное решение будем искать в виде:

$$y = y_0 + y_0'x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \dots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}x^n + \dots$$

По условию задачи

$$y_0 = 0, \quad y_0' = 0.$$

Из данного уравнения находим:

$$y'' = -yy' + 2, \text{ откуда } y_0'' = 2.$$

Далее, дифференцируя заданное уравнение, найдем последовательно y''' , y^{IV} , ...

Так как при дифференцировании уравнения

$$y'' = -yy' + 2$$

постоянная 2 обратится в нуль, то нам фактически нужно найти производную произведения функций yy' . Для этого воспользуемся формулой Лейбница для n -й производной произведения двух функций:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}.$$

Полагая в ней $u = -y$, $v = y'$, будем иметь:

$$y''' = -y'y' - yy'' \text{ и } y_0''' = 0;$$

$$y^{IV} = (-yy')'' = -y''y' - 2y'y'' - yy''' \text{ и } y_0^{IV} = 0;$$

$$y^V = (-yy')''' = -y'''y' - 3y''y'' - 3y'y''' - yy^{IV} \\ \text{ и } y_0^V = -12;$$

$$y^{(6)} = (-yy')^{IV} =$$

$$= -y^{IV}y' - 4y''y'' - \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} y''y''' - 4y'y^{IV} - yy^V \text{ и } y_0^{(6)} = 0;$$

$$y^{(7)} = (-yy')^V = -y^V y' - 5y^{IV} y'' - \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} y''y''' -$$

$$- \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} y''y^{IV} - 5y'y^V - yy^{(6)} \text{ и } y_0^{(7)} = 0;$$

$$y^{(8)} = (-yy')^{(6)} = -y^{(6)} y' - 6y^V y'' - \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} y^{IV} y''' -$$

$$- \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} y''y^{IV} - \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} y''y^V - 6y'y^{(6)} - yy^{(7)}$$

и

$$y_0^{(8)} = 6y_0^V y_0'' - \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} y_0'' y_0^V = -504.$$

Произведя вычисления производных в этом примере, можно обратить внимание на следующее:

1) У производной n -го порядка сумма порядков производных каждого слагаемого, стоящего в правой части, одинакова и равна $n - 1$.

2) Все производные, имеющие порядок $3k$ и $3k + 1$, обращаются в нуль, а производные порядка $3k + 2$ не равны нулю.

3) У производной порядка $3k + 2$ все слагаемые обращаются в нуль, за исключением тех, у которых порядок производной каждого сомножителя имеет вид $3k + 2$.

Исходя из этих соображений, можно упростить вычисление остальных производных. Следующая производная, которая не обратится в нуль, будет 11-я, сумма порядков слагаемых будет равна 10, не обращаются в нуль лишь слагаемые вида $y''y^{(8)}$ и $y^V y^V$.

По формуле Лейбница находим:

$$y_0^{(11)} = (-yy')_0^{(9)} = -9y_0^{(8)} y_0'' - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} y_0^{(5)} y_0^{(5)} -$$

$$- \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} y_0'' y_0^{(8)} = -9 \cdot 504 \cdot 2 - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} \cdot 12^2 - \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 504 \cdot 2 =$$

$$= -65504.$$

Используя установленную закономерность, можно было бы продолжить вычисление производных, но этого по ус-

ловию задачи не требуется, так как нам нужно найти 12 членов разложения.

Теперь выписываем приближенное решение в виде ряда

$$y = \frac{2}{21} x^2 - \frac{12}{51} x^5 + \frac{504}{81} x^8 - \frac{65504}{111} x^{11} + \dots = \\ = x^2 - \frac{1}{10} x^5 + \frac{1}{80} x^8 - \frac{7}{4400} x^{11} + \dots$$

Можно было бы доказать, что этот ряд сходится, например, при значениях $x \leq 1$ (из-за громоздкости выкладок мы это опускаем).

Теперь вычислим:

$$\int_0^1 y dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{10} x^5 + \frac{1}{80} x^8 - \frac{7}{4400} x^{11} + \dots \right) dx = \\ = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{60} x^6 + \frac{1}{720} x^9 - \frac{7}{4400 \cdot 12} x^{12} + \dots \right]_0^1 = \\ = \frac{1}{3} - \frac{1}{60} + \frac{1}{720} - \frac{7}{4400 \cdot 12} + \dots$$

Мы получили знакопеременный числовой ряд. Так как нам нужно вычислить значение интеграла с точностью до 0,001, то для вычисления достаточно взять первые три члена, поскольку ошибка не будет превышать

$$\frac{7}{4400 \cdot 12} < 0,001.$$

Производим вычисления:

$$0,3333 - 0,0167 + 0,0014 = 0,3180.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 y dx \approx 0,318 \text{ с точностью до } 0,001.$$

Наконец, вычислим $y' |_{x=0,5}$:

$$y = x^2 - \frac{1}{10} x^5 + \frac{1}{80} x^8 - \frac{7}{4400} x^{11} + \dots$$

Почленно дифференцируем:

$$y' = 2x - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{10} x^7 - \frac{7}{400} x^{10} + \dots,$$

$$y'|_{x=0,5} = 1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{10 \cdot 2^7} - \frac{7}{400 \cdot 2^{10}} + \dots$$

Для вычисления с точностью до 0,00001 достаточно взять первые три члена, так как

$$\frac{7}{400 \cdot 2^{10}} < 0,00001.$$

Производим вычисления:

$$1,000000 - 0,031250 + 0,000781 = 0,969531.$$

Таким образом, $y'|_{x=0,5} \approx 0,96953$ с точностью до 0,00001.

В задачах 224 — 227 найти в виде степенного ряда решения уравнений при указанных начальных условиях.

224. $y' = x^2 - y^2$, $y = 0$ при $x = 0$.

225. $xy'' + y = 0$, $y = 1$ при $x = 0$.

226. $y'' + \frac{1}{x} + y = 0$, $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

227. $y'' = x \sin y'$, $y = 0$, $y' = \frac{\pi}{2}$ при $x = 1$

(ограничиться шестью членами).

О Т В Е Т Ы

1. $\frac{1}{2}$. 2. Расходится 3. Расходится. 4. $\frac{1}{2}$. 5. $\frac{\pi}{6}$. 6. $\frac{\pi}{4}$. 7. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$
8. Расходится. 9. Сходится. 10. Расходится. 11. а) π ; б) π ; в) 0.
12. а) $\frac{\pi}{2}$; б) расходится в) расходится. 13. а) $a_n = \frac{1}{2n-1}$; б) $a_n = \frac{1}{n^2}$;
- в) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$; г) $a_n = (-1)^{n+1}$; д) $a_n = n^{(-1)^{n+1}}$. 14. а) $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \frac{10}{17} + \frac{13}{26} + \dots$; б) $-\frac{1}{2} + \frac{2}{4} - \frac{3}{8} + \frac{4}{16} - \frac{5}{32} + \dots$;
- в) $1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{9} + \frac{3}{16} + \frac{1}{25} + \dots$. 15. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$;
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)}$; в) $1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{(n-1)n}$. 16. а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{256} + \dots + \frac{1}{[3 + (-1)^n]^n} + \dots$; б) $-3 + \frac{2}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{2}{4!} - \frac{3}{5!} + \dots + \frac{\left(2 + \sin \frac{n\pi}{2}\right) \cos n\pi}{n!} + \dots$; в) $3 + 1 + \frac{3}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{5}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-3}{(n-1)^2 n^2} + \dots (n=3, 4, 5, \dots)$. 17. $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, $S = 1$. 18. $S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$, $S = 2$. 19. $S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}$, $S = \frac{3}{2}$
- 20 а) Расходится; б) расходится; в) необходимый признак ответа не дает, однако ряд сходится. г) расходится. 21. а) Расходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится;

д) расходится. 22. а) Сходится; б) сходится; в) сходится. 23. а) Сходится; б) расходится; в) сходится. 24. а) Расходится; б) сходится. 25. Сходится. 26. Расходится. 27. Расходится. 28. Сходится. 29. Расходится. 30. Сходится. 31. Сходится. 32. Расходится. 33. Сходится. 34. Сходится. 35. Расходится. 36. Расходится. 37. Сходится абсолютно. 38. Расходится. 39. Сходится абсолютно. 40. Сходится условно. 41. Сходится условно. 42. Сходится условно. 43. Сходится абсолютно.

но. 44. Расходится. 45. $\frac{1}{2} \ln 2$. 46. Не изменится. 47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

сходится условно. 48. Расходится. 49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$; сходится.

50. $R_n < \frac{n+2}{(n+1) \cdot (n+1)!}$; $R_{10} < 3 \cdot 10^{-8}$. 51. $R_n < \frac{1}{n}$; $R_{1000} < 10^{-3}$.

55. а) Может сходиться, может расходиться; б) расходится; в) сходится. 57. а) Расходится; б) сходится абсолютно; в) расходится; г) сходится условно.

58. $S(x) = \frac{x}{1-(1-x)} = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$

$\varphi_n(x) = \begin{cases} (1-x)^n & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ На отрезке $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

$\varphi_n(x) < 0,01$ при $n \geq 7$. 59. $S_n(x) = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x+2n+1)}$,

$\varphi_n(x) < 0,01$ при $n \geq 25$ и при любом $x \geq 0$. 60. $\frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} -$

$-\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$ при $-1 < x < 1$. 61. а) $\frac{1}{(1-x)^2}$ при $-1 < x < 1$;

б) $\frac{2}{(1-x)^3}$ при $-1 < x < 1$. 63. Рассмотрим ряд, составленный из производных. На любом, сколь угодно малом, интервале $x_1 < x < x_2$ найдется точка вида $\frac{k}{2^N}$, где k — целое, а N — достаточно большое

положительное число. Но при $x = \frac{k}{2^N}$ ряд производных расходится, так как для всех $n > N$ члены его становятся равными π .

64. $-1 \leq x \leq 1$. 65. $-1 \leq x < 1$. 66. $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.

67. $-1 \leq x \leq 1$. 68. $-6 < x < 0$. 69. $-\infty < x < +\infty$ 70. $0 \leq x \leq 4$.

71. $-3 \leq x < 1$. 72. $2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(x-1)^n \ln^n 2}{n!}$; $-\infty < x < \infty$.

73. $\cos \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} - \sin \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$;
 $-\infty < x < \infty$. 74. $x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+2}$; $-1 < x < 1$.
75. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$; $-\infty < x < \infty$.
76. $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n$; $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.
77. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + [1 + (-1)^n] \cdot (-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n} x^n$; $-1 < x \leq 1$.
78. $\sum_{n=1}^{\infty} n (x^{2n-2} + x^{2n-1})$; $-1 < x < 1$. 79. $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$;
 $-1 < x < 1$. 80. $\operatorname{arctg} 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$; $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$.
81. $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; $-1 < x < 1$.
82. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$; $-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$.
83. $e^{-2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} \right]$; $-\infty < x < \infty$. 84. $2 + \frac{x-4}{2^2} +$
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \frac{(x-4)^n}{2^{2n}}$; $0 < x < 8$. 85. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n! (2n+1)!}$;
 $-\infty < x < \infty$. 86. $\frac{x^2}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-5)}{(3n-1) \cdot 3^n \cdot n!} x^{3n-1}$;
 $-1 < x < 1$. 87. a) 1; б) $\frac{1}{3}$. 89. 3,017. 90. 0,309. 91. 0,1823.

92. 1,0986. 93. 4,8; ошибка не превышает 0,005. 94. Восемь членов.
 95. 0,4971, погрешность 0,0001. 96. 0,012, погрешность 0,001. 97. 0,608.

98. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. 99. $a_n = 0, b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } n = 2k-1 (k=1, 2, 3, \dots), \\ 0 & \text{при } n = 2k; \end{cases}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}; f^*(-\pi) = f^*(0) = f^*(\pi) = 0$. 100. $a_0 = 2; a_n = 0 (n=1, 2, 3, \dots);$

$b_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & \text{при } n = 2k-1, \\ 0 & \text{при } n = 2k; \end{cases} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2};$

$S(-2) = S(0) = S(2) = 1$. 101. $b_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ \frac{8n}{\pi(n^2-1)} & \text{при } n \text{ четном } (n=2k); \end{cases}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{16k}{\pi(4k^2-1)} \sin 2kx$. 102. $a_n = \begin{cases} \frac{8}{\pi(4-n^2)} & \text{при } n \text{ нечетном } (n=2k-1), \\ 0 & \text{при } n \text{ четном;} \end{cases}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(3+4k-4k^2)} \cos \frac{(2k-1)x}{2} = \frac{8}{3\pi} \cos \frac{x}{2} - \frac{8}{5\pi} \cos \frac{3x}{2} -$

$-\frac{8}{21\pi} \cos \frac{5x}{2} - \dots$ 106. а) Сходится абсолютно при $|x| > 1$;

б) сходится абсолютно при $x > -\frac{1}{3}$ и при $x < -1$;

в) сходится абсолютно при $|x| < 1$. 107. а) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$; б) 3;

в) $\frac{x}{(x-1)^2}$ при $|x| > 1$. 109. а) $-2 < x < 2$; б) $3 < x < 7$.

110. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$; $-1 < x < 1$;

б) $2|x| \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n}}{2n+1} \right\}$ при $0 < x < 1$ и $-1 < x < 0$.

111. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x+1)^{2n}$; $-2 < x < 0$. 112. а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n,$

$-\infty < x < \infty$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(-1 \right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n \right\}$;

- $-1 < x < 1$. 113. а) $R \geq \min(R_1, R_2)$; б) $R \geq R_1 R_2$. 114. 0,119.
 115. Частный интеграл $(x+2)^2 + y^2 = 4$. 116. Частное решение $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. 117. Дифференциальное уравнение семейства парабол: $xy' - y = x^2$. 118. Дифференциальное уравнение семейства эллипсов: $4yy' + x = 0$. 119. $x^2(1+y^2) = C$. 120. $x^2 + y^2 = \ln C x^2$.
 121. $Cx = \frac{y-1}{y}$. 122. $y = (x+C)^2$. 123. $y = 1$. 124. $y^2 - 1 = 2\ln(e^x + 1) - 2\ln(e + 1)$. 125. $xy = 8$. 126. 0,958 m_0 . 127. 1,654 $кз$.
 128. $\omega = 100 \left(\frac{3}{5}\right)^t$ об/мин. 129. 35,2 сек. 130. $x^2 + y^2 = x + y$.
 131. $y(y-2x)^3 = C(x-y)^2$. 132. $y^2 = 2x^2 \ln x + x^2$. 133. $x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y = C$. 134. $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$. 135. $x + 2y + 3 \ln(x+y-2) = C$. 136. $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$, где $k = \operatorname{tg} \omega$; в полярных координатах $r = Ce^{\frac{\varphi}{k}}$ — логарифмические спирали. 137. $y = Cx^3 - x^2$. 138. $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$. 139. $y = 1$.
 140. $x = y^2(1 + Ce^{\frac{1}{y}})$. 141. $2 = Cy^2 e^{2x^2} + 2x^2 y^2 + y^2$.
 142. $y^2(Ce^{x^2} + 1) = 1$. 143. $I = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. 144. $x^4 - 6x^2 y^2 + y^4 = C$. 145. $x^2 + y^2 + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$. 146. $y = x$. 149. Огибающими семейства будут прямые $y = \pm 2$. 150. Общее решение $y = Cx - C^2$; особое решение $y = \frac{x^2}{4}$. 151. Общее решение $y = Cx - \sqrt{1 + C^2}$; особое решение $y = -\sqrt{1 - x^2}$. 152. $\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{2C} = 1$.
 153. $e^{\frac{y}{x}} = Cy$. 154. $y = \frac{x}{\cos x}$. 155. $x^2 - y^2 + 2xy = C$. 156. Общее решение $y = Cx + \frac{1}{C}$; особый интеграл $y^2 = 4x$. 157. $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C$. 158. $y = xe^{Cx+1}$. 159. Общее решение $y = Cx - 3C^3$; особое решение $y = \pm \frac{2}{9}x\sqrt{x}$. 160. $y = \frac{e^x + C}{x}$. 161. $3x + y + 2\ln(x+y-1) = C$. 162. $\ln(4x + 8y + 5) + 8y - 4x = C$.
 163. $x\sqrt{1+y^2} + \cos y = C$. 164. $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$. 165. $y(x^2 + Cx) = 1$.

166. $y^3(3 + Ce^{\cos x}) = 1$. 167. $x = Ce^{\pm 2} \sqrt{\frac{y}{x}}$. 168. $v = \frac{g}{2a - k} \times$
 $\times (M_0 - at) \left[\left(1 - \frac{a}{M_0} t \right)^{\frac{k}{a} - 2} - 1 \right]$. 169. $xy = a^2$, или прямые $y =$
 $= Cx \pm 2a\sqrt{-C}$. 170. $y = x - \frac{1}{x + C}$. 171. $x + C = \operatorname{ctg} \left(\frac{y - x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$.
172. $x + y = a \operatorname{tg} \left(C + \frac{y}{a} \right)$. 173. а) $(C - \ln x)(1 - xy) = 2$;
б) $(xy - 1) \ln Cx = 1$. 175. $\ln x - \frac{y^2}{x} = C$. 176. $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$. 177. $\frac{1}{y} \ln x +$
 $+\frac{1}{2} y^2 = C$. 178. Общий интеграл $\left(\frac{x^2}{2} - y + C \right) \left(x - \frac{y^2}{2} + C \right) = 0$;
особого интеграла нет. 179. Общий интеграл $y^2 + C^2 = 2Cx$; особый ин-
теграл $x^2 - y^2 = 0$. 180. $\begin{cases} x = \sin p + \ln p, \\ y = p \sin p + \cos p + p + C. \end{cases}$
181. $\begin{cases} x = e^p + pe^p + C, \\ y = p^2 e^p; \text{ особое решение } y = 0. \end{cases}$ 182. $4y = x^2 + p, \ln(p - x) =$
 $= C + \frac{x}{p - x}$.
183. $\begin{cases} x = \frac{1}{p^2} (\ln p + C), \\ y = \frac{1}{p} (2 \ln p + 2C + 1). \end{cases}$ 184. $\begin{cases} x = \ln p - \arcsin p + C, \\ y = p + \sqrt{1 - p^2}. \end{cases}$
185. $y = \frac{x^3}{6} + x \ln x + C_1 x + C_2$. 186. $y = (C_1 x + C_1^2) e^{\frac{x}{C_1} + 1} + C_2$.
187. $y = \frac{x + C_1}{x + C_2}$. 188. $y = \frac{1}{3} (C_1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + C_2 x + C_3$. 189. $y =$
 $= e^x (x - 1) + C_1 x^2 + C_2$. 190. $\operatorname{ctg} y = C_2 - C_1 x$. 191. $y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} +$
 $+ C_1 \operatorname{arctg} x + C_2$. 192. Через 9,3 сек. 193. Дифференциальное урав-
нение $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$. 194. $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$.
195. $y = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1$. 196. $y = 3e^{-2x}$. 197. $y = e^{-x} (C_1 \cos 3x +$

$+ C_2 \sin 3x$). 198. $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$. 199. $y = (C_1 + C_2 x) e^x$.
 200. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-x}$. 201. $y = 9 - 2e^{-4x}$. 202. $y = e^{2x} \cos 2x$.
 203. $y = e^{-kt} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t)$, или $y = A e^{-kt} \sin (\omega_1 t + \varphi)$,
 где $2k = \frac{c_1}{m}$ (c_1 — коэффициент пропорциональности силы сопротивления
 среды), $\omega_1^2 = \omega^2 - k^2$, а $\omega^2 = \frac{c}{m}$ (c — постоянный коэффициент
 жесткости). 204. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + e^x$. 205. $y =$
 $= C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{6} x^3$. 206. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{2} x \sin 3x$.
 207. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + \frac{1}{4} e^x$. 208. $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) +$
 $+ \frac{1}{2} x e^{-x} \sin x + x e^{-x}$. 209. $y = e^x (0,16 \cos 3x + 0,28 \sin 3x) + x^2 +$
 $+ 2,2x + 0,84$. 210. $y = e^x (e^x - x^2 - x + 1)$. 211. $y = (C_1 - \ln x +$
 $+ C_2 x) e^x$. 212. $y = \frac{Q}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, или $y =$
 $= \frac{Q}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t + A \sin (\omega t + \varphi)$, где $Q = \frac{Q_1}{m}$, $\omega^2 = \frac{c}{m}$ (c — ко-
 эффициент жесткости пружины). 213. а) $r = \frac{a}{2} \left(e^{\omega t} + e^{-\omega t} \right)$;
 б) $r = \frac{v_0}{2\nu} \left(e^{\omega t} - e^{-\omega t} \right)$. 214. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$. 215. $y = x (C_1 +$
 $+ C_2 \ln x + C_3 \ln^2 x)$. 216. $y = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x$. 217. $y =$
 $= C_1 x^3 + C_2 x^2 + \frac{1}{2} x$. 218. $y = x (\ln x + \ln^2 x)$. 219. $y =$
 $= e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, $z = \frac{1}{5} e^{-x} \left[(C_2 - 2C_1) \cos x - \right.$
 $\left. - (C_1 + 2C_2) \sin x \right]$. 220. $y = (C_1 - C_2 - C_1 x) e^{-2x}$, $z = (C_1 x + C_2) e^{-2x}$.
 221. $y = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x) e^{-x} - 6x + 14$, $z = (C_1 + C_2 x) e^{-x} +$
 $+ 5x - 9$; $C_1 = 9$, $C_2 = 4$. 222. $y = \frac{2C_1}{(C_2 - x)^2}$, $z = \frac{C_1}{C_2 - x}$. 223. $x =$
 $= \frac{v_0 m \cos \alpha}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right)$, $y = \frac{m}{k^2} (k v_0 \sin \alpha + mg) \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right) - \frac{m g t}{k}$,

где m — масса снаряда, k — коэффициент пропорциональности сопротивления воздуха.

$$224. y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7 \cdot 9}x^7 + \frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 27}x^{11} - \dots \quad 225. y = x -$$

$$- \frac{x^2}{(1!)^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{(2!)^2 \cdot 3} - \frac{x^4}{(3!)^2 \cdot 4} + \dots$$

$$226. y = 1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!}x^6 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!}x^9 + \dots \quad 227. y = \frac{\pi}{2}(x-1) +$$

$$+ \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{(x-1)^4}{4!} - \frac{4(x-1)^5}{5!} + \dots$$

Анатолий Тихонович Цветков

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Редакторы *В. Г. Долгополов* и *А. З. Рывкин*

Художественный редактор *А. В. Максаяв*

Технический редактор *М. И. Смирнова*

Корректор *В. Соловьева*

Слано в набор 2/XI 1961 г. Подписано к печати 20/II 1962 г.
 $84 \times 108^{1/32}$. Печ. л. $12^{1/4}$. Уч.-изд. л. 8,55. Тираж 35 тыс. экз.

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 48

Полиграфкомбинат Саратовского совнархоза,
 г. Саратов, ул. Чернышевского, 59

Заказ 3113. Цена 26 коп.

